単振り子の数値計算

1　振り子の等時性とその破れ（理論）

図 1 のような単振り子を考える。紐の一端は天井に固定されており，他端には質点 m が取り付けられている。紐の長さを ℓ とし，紐の伸び縮みは考えない。時刻 $t=0$ における振れ角を $\theta_0 \coloneqq \theta(t=0)$ として，$t>0$ における運動を以下で調べよう。

(1) 時刻 t における振れ角を $\theta=\theta(t)$ とする（$|\theta| \leq \theta_0$）。振り子には重力 mg がはたらき，その接線成分の大きさは $mg\sin\theta$ で与えられる。また，時刻 t における質点の速さは $v=\ell(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)=\ell\dot{\theta}$ である。振り子の運動方程式の接線成分が以下で与えられることを示せ。

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta\ . \tag{1.1}$$

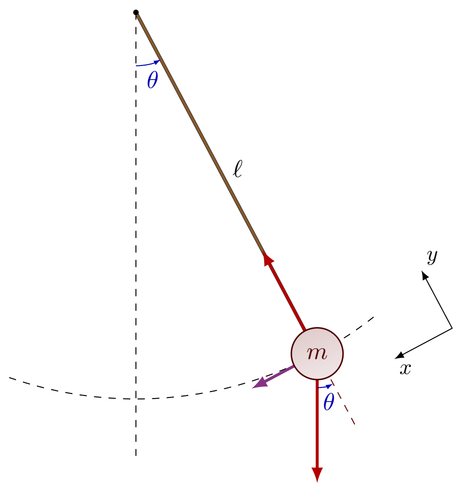

図 1　単振り子

式 (1.1) は θ に関する非線形な方程式となっており，解析的に解くことは一般にできない。しかし θ が微小角である場合（$|\theta| \ll 1$，したがって $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$ ということ。記号 $\mathcal{O}(\theta^3)$ は θ の三次以上の項を表す）には解析的に解けるのだった。

(2) 振れ角が微小の場合に，運動方程式 (1.1) の解で，初期条件 $\theta(0)=\theta_0$ かつ $\dot{\theta}(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ を満たすものを求めよ。また，得られた解に対して，振り子の周期が以下で与えられることを示せ。

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ . \tag{1.2}$$

振れ角 θ が必ずしも微小とは限らない場合は，運動方程式 (1.1) は解析的に解けない（厳密解が存在しない）。しかしながら，エネルギー保存の議論から周期 T の表式を解析的に導くことができる。

(3) 時刻 $t=0$ と時刻 $t>0$ において，系の力学的エネルギーは保存する。このことから，速度に関する以下の表示を導け。

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta-\cos\theta_0)}\ . \tag{1.3}$$

(4) 式 (1.3) を落ち着いて見ると変数分離形であることに気が付く。このことから，振り子の周期に関する以下の表式を導け。

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\ . \tag{1.4}$$

［ヒント：$t=0$ のとき $\theta(0)=\theta_0$ であって，振り子が最下点に来たとき $t=T/4$ でそのとき $\theta(t=T/4)=0$ である。］

(5) 次の変数変換 $\theta \mapsto \Theta$：

$$\sin\Theta \coloneqq \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \tag{1.5}$$

によって，周期の表式 (1.4) が以下の通り書き換えられることを示せ。［ヒント：θ を含む項を全て Θ で書き換えよ。］

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_0/2)\sin^2\Theta}}\ . \tag{1.6}$$

(6) 第一種完全楕円積分とは

$$K(z) \coloneqq \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-z\sin^2\theta}} \tag{1.7}$$

によって定義される関数 $K(z)$ のことである。

(a) $K(0)$ と $K(1/2)$ を求めよ。

(b) 振り子の周期 (1.6) 右辺の積分は一般に解析的にできないが，第一種完全楕円積分を用いて

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\ . \tag{1.8}$$

と表せることを確認せよ。

以上で，振り子の周期を解析的に表す式 (1.6) が導けた。θ_0 が小さいときにこの式を展開すると，式 (1.2) を再現することができるはずである。また，θ_0 が必ずしも小さくないときに，式 (1.2) からどのように補正されていくかを見ることもできる。

(7) $|\theta_0| \ll 1$ のとき，振り子の周期の式 (1.6) を Taylor 展開することを考える。$\sin\theta_0 = \theta_0 + \mathcal{O}(\theta_0^3)$ と，$|x| \ll 1$ に対して成り立つ展開式：$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$ を使って，式 (1.6)) の被積分関数が以下の通り展開されることを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_0/2)\sin^2\Theta}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2\sin^2\Theta + \mathcal{O}(\theta_0^4)\ . \tag{1.9}$$

(8) 式 (1.9) を式 (1.6) に戻して積分を実行することで，微小角 θ_0 に対して周期 (1.6) が以下の通り展開されることを示せ。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} + \left(\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)\theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^4)\ . \tag{1.10}$$

(9) 式 (1.10) をさらに次の項まで展開して以下のように書いたとき，空欄に入る係数はなにか？（たぶん $\boxed{} = 11/3072$）

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \boxed{}\,\theta_0^4 + \mathcal{O}(\theta_0^6)\right]\ . \tag{1.11}$$

必要ならば，展開式 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + [\alpha(\alpha-1)/2]\,x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ および $\sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ を用いてよい。

式 (1.10) や (1.11) には θ_0 の最低次として確かに $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ が現れ，高次の項が振り子の等時性に対する補正を与える。ところで，周期 T の θ_0 に関する展開式は θ_0 の偶関数となるが，θ_0 の奇数乗の項が現れないことの物理的な理由はなにか？

2 準備課題：微小角の場合の数値計算

数値計算の手始めとして，振動角 θ が微小である場合（単振動と同等）を最初に扱う。

(10) 数値計算に際して，運動方程式 (1.1) を $|\theta| \ll 1$ の下で近似したものを無次元化したい。θ は元々無次元なので，無次元化すべき量は時刻 t のみである。微小角 θ に対して，無次元化時刻 $\widetilde{t} \coloneqq t/T_0$ によって運動方程式 (1.1) を無次元化すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\widetilde{t}^2} = -(2\pi)^2\theta \tag{2.1}$$

が得られることを示せ。設問 (2) と全く同じ初期条件の下で運動方程式 (2.1) の厳密解を求めよ。無次元化周期 $\widetilde{T}_0$ は？

(11) ある時刻 t における振れ角 $\theta(t)$ に対して，その隣り合う時刻における振れ角は Taylor 展開によって

$$\theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t)\cdot(\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^3)\ , \tag{2.2a}$$

$$\theta(t-\Delta t) = \theta(t) - \dot{\theta}(t)\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t)\cdot(\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \tag{2.2b}$$

と与えられることを理解せよ（差分化された運動方程式 (2.4) をいつでもこのように導出できるようになれということ）。式 (2.2a) と式 (2.2b) を辺々足して整理すると，Δt の一次の項がキャンセルして

$$\theta(t+\Delta t)+\theta(t-\Delta t)=2\theta(t)+\ddot{\theta}(t)\cdot(\Delta t)^2 \tag{2.3}$$

が得られる。数値計算でいつも行なうように，

$$\begin{aligned}
\theta(0) &\longleftrightarrow \theta_{i=0}\ ,\\
\theta(\Delta t) &\longleftrightarrow \theta_{i=1}\ ,\\
&\vdots\\
\theta(t-\Delta t) &\longleftrightarrow \theta_{i-1}\ ,\\
\theta(t) &\longleftrightarrow \theta_{i}\ ,\\
\theta(t+\Delta t) &\longleftrightarrow \theta_{i+1}\ ,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

と対応させ，さらに運動方程式 (2.1) から $\ddot{\theta}=-(2\pi)^2\theta$ であることを思い出せば，微小角 θ に対する運動方程式 (2.1) を差分化した式 (2.3) が以下の通り与えられることを示せ。

$$\theta_{i+1}=-\theta_{i-1}+2\theta_i-(2\pi)^2\theta_i(\Delta t)^2=-\theta_{i-1}+\left[2-(2\pi)^2(\Delta t)^2\right]\theta_i\ . \tag{2.4}$$

(12) 微小角 θ に対する運動方程式 (2.1) を数値的に解け。初期条件はこれまでと同様 $\theta(0)=\theta_0$ かつ $\dot{\theta}(0)=0$ とするが，$t=0$ における角度 $0<\theta_0<\pi/2$ を色々と変えて試せ。一例として，以下の数値を用いた場合の結果を図 2 左に示す。

$$0\le t\le 4\ ,\qquad \theta_0=k\cdot\frac{\pi}{6}\ ,\qquad k=1,\,2,\,3\ . \tag{2.5}$$

(13) 数値計算の結果（図 2 左）から，各初期値 θ_0 に対して図 2 右（黒丸）のように周期を取り出す方法を考えて，実行せよ。

(14) ところで，厳密な周期 (1.8)［数値積分により計算]，最低次しか見ない周期 (1.2)，二次の項まで見た周期 (1.10)，四次の項まで見た周期 (1.11)（の各々を無次元化したもの）を比較せよ。図 3 に一例を示す。この比較から導かれる結論は？

3 本課題：有限角の場合の数値計算

無近似の運動方程式 (1.1) を数値的に解き，$\theta(t)$ の時間変化と周期を色々な初期値 θ_0 に対して調べよ。図 4 は結果の一例を与える。ただ調べよと言われても何をやればよいか分からず困るという人は，以下の小項目を参考にしつつ取り組むとよい。

(15) 運動方程式の差分化が $\theta_{i+1}=-\theta_{i-1}+2\theta_i-(2\pi)^2\cdot\sin\theta_i\cdot(\Delta t)^2$ となることを納得し，$0<\theta_0<\pi/2$ なるいくつかの θ_0 に対して数値的に解いて，結果を図示せよ。

(16) 設問 (13) で考案した方法により，設問 (15) の計算結果から周期を取り出し，各初期値 θ_0 に対してプロットを作成せよ。

(17) 設問 (16) で作成したプロットと，設問 (14) において計算した厳密な周期を比較することで数値計算の正当性を確かめよ。

(18) これまで一貫して $\dot{\theta}(t=0)=0$ という初期条件を課していたが，初速度がゼロでない場合の質点の挙動を研究してみよ。

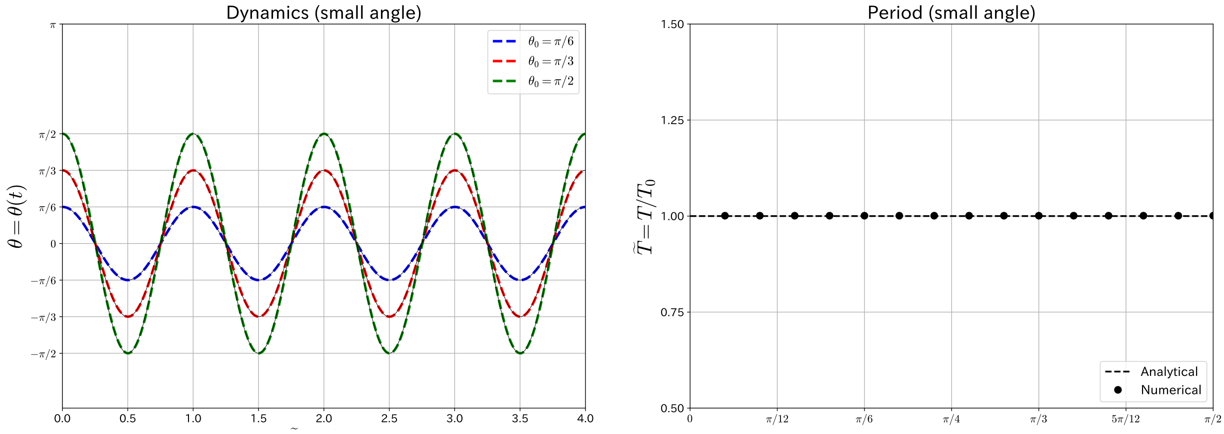

図 2　微小角近似の下での運動方程式 (2.1) の数値解。左図が角度の時間変化（厳密解も細い黒線でプロットしてあるが，数値解と重なっていてほとんど見えない。したがって数値計算は正しい），右図は各初期値 θ_0 に対する無次元化された周期。

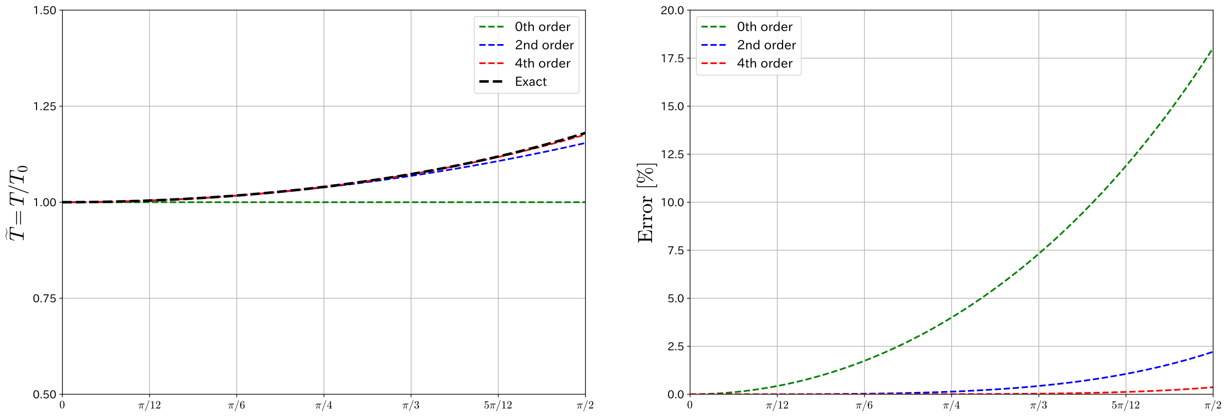

図 3　振り子の周期について，厳密な表式と θ_0 に関する展開式の比較。

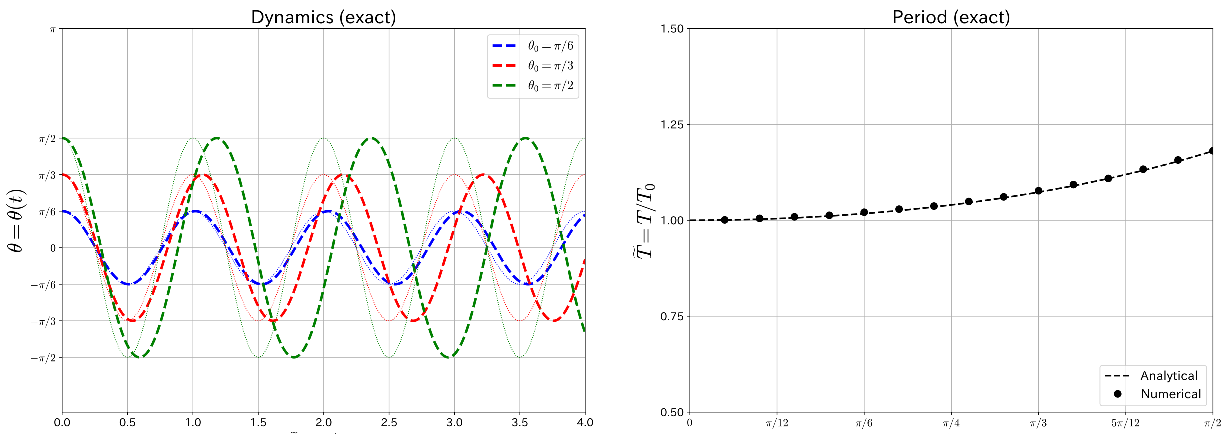

図 4　厳密な運動方程式 (1.1) の数値解。左図が角度の時間変化（細線は微小角近似の厳密解。図 2 の曲線に対応)。右図の黒丸は各初期値 θ_0 に対する無次元化された周期で，波線が第一種完全楕円積分 $K(z)$ を用いた厳密な周期を表す。