物理学 A 期末試験（渡慶次）

2024 年 6 月 29 日・90 分間

注意事項

1. 試験問題はこの裏面 1 枚。配布物はこの紙 1 枚，解答用紙 2 枚，計算用紙 1 枚。下線のものを提出すること。

2. 問題用紙と解答用紙の両方に学籍番号・氏名等の必要事項を記入すること。

3. 最終的な結果だけでなく，結果に至る過程（日本語を含む）も目で追える程度に詳しく書くこと。

4. 資料の持ち込みは一切不可。

5. 各大問に付随する小問はどのような順序で解いてもよい。

6. 問題の不備や条件不足が考えられる場合には，適宜修正のうえ，修正点を明記して解答すること。

7. 問題文にない文字を解答に用いる場合は，最終結果の傍に自身で定義した文字の定義を記すこと。

以上

I. 水平面上を弾性定数 k のばねに繋がれた質点 m が振動しており，m には速度に比例した抵抗力（比例係数：μ）がはたらいている。ばねの一端は壁に固定されており，自然長の位置を $x=0$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 質点にはたらく水平方向の力を，向きと大きさが分かるように図示せよ。さらに質点の運動方程式を次の形で書いたときの定数 γ と ω_0 を求めよ。以下の設問では，特に断ることなしに γ と ω_0 を用いてよい。

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0\ . \qquad (\mathbf{A})$$

(2) 前問の運動方程式の解を $x=e^{\lambda t}$ の形で置いたときの二つの $\lambda_+ \geqq \lambda_-$ を求めよ。 さらに，以下の各々の場合について，($\mathbf{A}$) 式の一般解（したがって二つの任意定数を含む）を**実数の範囲で**記せ。

(a) $\gamma>\omega_0$　　(b) $\gamma<\omega_0$　　(c) $\gamma=\omega_0$

(3) 前問 (b) の場合について，初期条件 $x(0)=0$ かつ $v(0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0$ を満たす $x(t)$ を求めよ。また，求めた $x(t)$ を tx 平面に図示せよ。

(4) 前問 (3) で求めた解について，$t=0$ から出発して次に原点を通過するまでに抵抗力がした仕事を求めよ。

II. 次のポテンシャルの下で行なわれる質点 m の運動について，以下の問に答えよ。g と h は正の定数とする。

$$V(x)=-\frac{g^2}{x}+\frac{h^2}{x^2}\qquad (x>0)\ .$$

(1) $V'(x)=\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ と $V''(x)=\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2$ を計算し，$V(x)$ の概形を図示せよ。$V'(x)=0$ の解 $x_\star$ を求めよ。

(2) m の力学的エネルギー E が $V(x_\star)<E<0$ の範囲にあるとき，運動の禁制領域と許容領域を図示せよ。

(3) 極小点 $x_\star$ の周りでは $V'(x_\star)=0$ であり，以下の通りポテンシャルを二次関数で近似することができる。

$$V(x)\simeq V(x_\star)+\frac{1}{2}V''(x_\star)\cdot(x-x_\star)^2 \qquad (\mathbf{B})$$

($\mathbf{B}$) 式のポテンシャルに対する運動方程式 $m(\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2)=-\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ が単振動を記述することを説明せよ。

(4) 前問の運動方程式について，初期条件 $x(0)=x_0$ かつ $v(0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ を満たす解 $x(t)$ を求めよ。

III. 上空から直線的に落下する質点 m の運動を考える。質点には速度に比例する空気抵抗がはたらくとし，比例係数を μ とする。重力加速度の大きさを g とし，鉛直下向きに z 軸をとって以下の問に答えよ。質点は充分に高い位置から落下を始めるので，以下の設問では地表に到達してしまうことは考えない。

(1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し，質点の運動方程式を $v=\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ で書け。

(2) 前問で書いた運動方程式について，初期条件 $v(0)=0$ を満たす解を求めて図示せよ。図には終端速度 $v_\mathrm{T}\equiv\lim\limits_{t\to\infty}v(t)$ の値を明記すること。

IV. xy 面内において，一端が原点 O に固定された棒の他端に繋がれた質点 m が，速度 $\boldsymbol{v}$ に比例する抵抗（比例係数：μ）を受けながら回転している。m の位置を $\boldsymbol{r}=(x,y)=(\ell\cos\theta,\ell\sin\theta)$ と表して，以下の問に答えよ。

(1) 原点 O 周りの角運動量 $\boldsymbol{L}$ と，モーメント $\boldsymbol{N}$ を成分表示の形で求めよ。質点 m の角速度を ω とせよ。

(2) 前問の結果から回転運動の方程式を書き下し，初期条件 $\omega(0)=\omega_0$ を満たす解 $\omega(t)$ を求めて図示せよ。

♣. 時間が余った人や，問題を解くのを諦めた人は，講義で面白かったこと，つらかったこと等自由に述べてください。特にない場合は，まったく無関係な自由記述を行なってもかまいません。採点には一切影響しません。

以上

略解

各小問番号の後にある "npt" は加点箇所が n 箇所あることを示します。例えば，大問 **I.** (2) なら 4pt なので，加点箇所が 4 箇所あるということを表します。具体的にどことどこで加点されているかは，解答の最後にある（採点基準）を読んでください。各小問で 1pt が何点になるかは問題ごとに異なりますが，大問単位での配点は固定しました。

I. (1)（?pt）図は略（講義ノート等参照のこと）。運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{整理して} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0\ . \tag{1}$$

これを問題文の式と見比べて $\boxed{\gamma = \mu/2m}$ と $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$ を得る。

(2)（?pt）解の形として仮定した $x = e^{\lambda t}$ について微分は $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \lambda e^{\lambda t}$ と $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = \lambda^2 e^{\lambda t}$ である。これらを設問 (1) の運動方程式に代入すると

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0 \tag{2}$$

を得る。今 $e^{\lambda t} \neq 0$ なので λ は二次方程式 $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ の解として与えられる。したがって $\boxed{\lambda_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$ と $\boxed{\lambda_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$。次に，$\gamma$ と ω_0 の大小で場合分けを行なう。以下 c_1, c_2, a, b はすべて積分定数でしかも実数とする。

(a) $\gamma > \omega_0$ のとき，$\lambda_\pm$ はともに実数なので運動方程式の一般解は

$$\underline{x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} = c_1 \exp\left[\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t\right] + c_2 \exp\left[\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t\right]}\ .$$

全体を $e^{-\gamma t}$ でまとめて $x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t})$ のように書いてももちろん良い。

(b) $\gamma < \omega_0$ のとき，$\lambda_\pm = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ と表せるので一般解は

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} \\
&= c_1 \exp\left[\left(-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\right] + c_2 \exp\left[\left(-\gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\right] \\
&= e^{-\gamma t}\left\{c_1 \exp\left[\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\right] + c_2 \exp\left[\left(-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)t\right]\right\} \\
&= e^{-\gamma t}\left[(c_1 + c_2)\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right) + i(c_1 - c_2)\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right)\right] \\
&= \underline{e^{-\gamma t}\left\{a\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right) + b\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right)\right\}}
\end{aligned} \tag{3}$$

ただし最後の変形で $c_1 + c_2 = a,\ i(c_1 - c_2) = b$ と置いた。

(c) $\gamma = \omega_0$ のとき，$\lambda_+ = \lambda_-$ つまり重解となってしまい，$e^{\lambda_+ t}$ と $e^{\lambda_- t}$ が独立な二解とならない。$\lambda \equiv \lambda_+ = \lambda_- = -\gamma$ と書くことにして，このような場合の一般解は $e^{\lambda t}$ と $te^{\lambda t}$ の線型結合，つまり

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = \underline{(c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}}\ .$$

(3)（?pt）以下 $\gamma < \omega_0$ について $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ とする。前問 (b) の (3) 式は ω を使って $x(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t$ とかけて，対応する速度 $v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ は

$$v(t) = [-\gamma(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + (-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t)]e^{-\gamma t} \tag{4}$$

と計算できる。初期条件を適用すると，まず (3) 式について $x(0) = a = 0$ から $a = 0$ と決まる。一方で (4) 式から $v(0) = -\gamma a + b\omega = v_0$ から $b = v_0/\omega$ と決まる。したがって所望の解は

$$\underline{x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right)}\ . \tag{5}$$

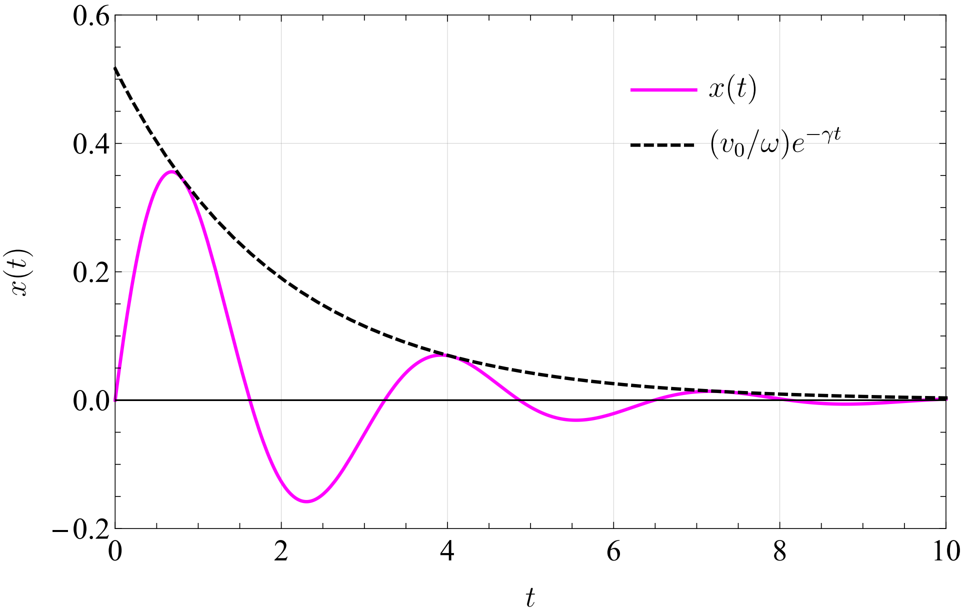

図 1　(5) 式の図示。パラメータは $v_0 = 1,\ \omega_0 = 2,\ \gamma = 1/2$ とした。

図 1 に (5) 式の一例を示す。

(4) (?pt) 抵抗力がした仕事は系の力学的エネルギーの変化に等しい。$t > 0$ で最初に原点を通過する時刻は (5) 式つまり $x(t) = (v_0/\omega)e^{-\gamma t}\sin\omega t$ が 0 になるときなので $\omega t = \pi$ より $t = \pi/\omega$ である。一方，(5) 式を微分して $v(t) = \dfrac{v_0}{\omega}(-\gamma\sin\omega t + \omega\cos\omega t)e^{-\gamma t}$ なので時刻 t での力学的エネルギーは $E(t) = mv^2(t)/2 = \cdots$ と計算できる。以上から求めるべき仕事は

$$E\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) - E(t = 0) = -\frac{mv_0^2}{2}\left[1 - \exp\left(-\frac{2\gamma\pi}{\omega}\right)\right] .$$

(採点基準) 後ほど追加します。配点 ??。(1)：。(2)：。(3)：。(4)：。

II. (1) (?pt)

$$V'(x) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{g^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} = \frac{g^2x - 2h^2}{x^3} ,$$
$$V''(x) = \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2g^2}{x^3} + \frac{6h^2}{x^4} = \frac{-2g^2x + 6h^2}{x^4} .$$

これから増減表が書けて $V(x)$ の概形が書ける。図 2 に例を示す。また $V'(x_\star) = 0$ を満たす $x_\star$ は上式よりただちに $\boxed{x_\star = 2h^2/g^2}$ 。

(2) (?pt) m の力学的エネルギーが $V(x_\star) < E < 0$ を満たすとき，エネルギー E とポテンシャル V の関係は図 2 のようになる。$V = E$ となる二つの交点を小さい順に $x_-,\ x_+$ としたとき，$0 < x < x_-$ と $x_+ < x$ で $E < V$ となるので禁制領域，逆に $x_- < x < x_+$ で $E > V$ となるので許容領域。

(3) (?pt) 問題文の展開式を微分することにより，m の運動方程式が得られて

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -V''(x_\star)(x - x_\star) . \tag{6}$$

これは振動中心 $x = x_\star$，角振動数 $\omega \equiv \sqrt{V''(x_\star)/m}$ の単振動を表す。

(4) (?pt) 前問より $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2(x - x_\star)$。変数変換 $x \mapsto X \equiv x - x_\star$ によって運動方程式は $\mathrm{d}^2X/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2X$ となって，この一般解はよく知っており $X(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$。$x$ に戻して $x(t) =$

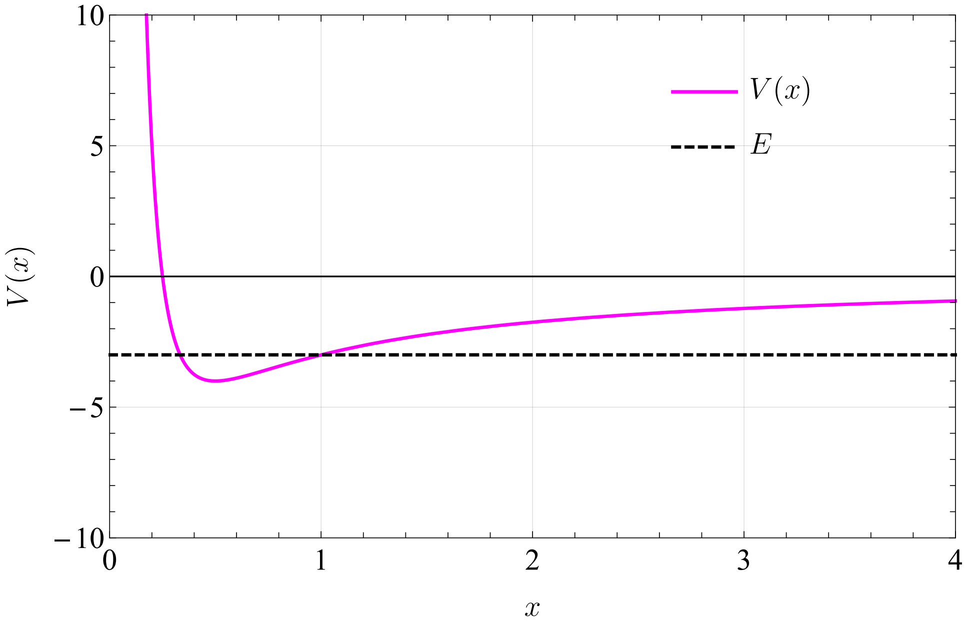

図 2　$V(x)$ の図示。パラメータは $g=2$, $h=1$ とした。

$x_\star + c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$。初期条件から $a = -x_\star + x_0$, $b = 0$ と決まるので，所望の解は

$$x(t) = x_\star + (x_0 - x_\star)\cos\omega t = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g^8}{8h^6 m}}\,t\right) + x_\star\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g^8}{8h^6 m}}\,t\right)\right] .$$

ここで設問 (1) の結果から $V''(x_\star)$ の具体的な表式を代入した。

（採点基準）後ほど追加します。配点 ??。(1)：。(2)：。(3)：。(4)：。

III. (1)（?pt）図は略（講義ノート等参照のこと）。運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} . \tag{7}$$

(2)（?pt）$v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ を使って (1) の運動方程式を書き換えると，$\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ なので

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \mu v . \tag{8}$$

これは $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu}{m}\left(v - \dfrac{mg}{\mu}\right)$ さらに

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - (mg/\mu)} = -\frac{\mu}{m}\,\mathrm{d}t$$

と変形することで変数分離形に帰着する。両辺を積分して（c'：定数）

$$\log\left(v - \frac{mg}{\mu}\right) = -\frac{\mu}{m}t + c'$$

したがって，$e^{c'} \equiv C$ と改めて一般解は

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + C\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) . \tag{9}$$

特に初期条件 $v(0) = mg/\mu + C = 0$ のとき，$C = -mg/\mu$ と決まり

$$\underline{v(t) = \frac{mg}{\mu}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\right]} \ . \tag{10}$$

図は略（講義ノート等を参照）。終端速度は $\underline{v_{\mathrm{T}} = mg/\mu}$。

（採点基準）後ほど追加します。配点 ??。(1)：。(2)：。(3)：。(4)：。

IV. (1)（?pt）計算したいのは角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ とモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ である。ここに運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ と抵抗力 $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$。そのために必要な位置を加速度をまず用意しておき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell\cos\theta \\ \ell\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}\sin\theta \\ \ell\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}x \\ \dot{\theta}y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

したがって

$$\boldsymbol{L} = m\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\dot{\theta}x \\ \dot{\theta}y \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell^2\dot{\theta} \end{pmatrix}} \ , \qquad \boldsymbol{N} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu\ell^2\dot{\theta} \end{pmatrix}}$$

と計算できる。ただし $\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$ などを使った。

(2)（?pt）角速度の定義から $\omega(t) = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \dot{\theta}$ であることを思い出しつつ上式を回転運動の方程式 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{N}$ に代入すると，z 成分から $\omega = \omega(t)$ に対する方程式が以下の通り得られる。

$$m\ell^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\mu\ell^2\omega \ .$$

これは変数分離形なので解けて，一般解 $\omega(t) = C\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)$。初期条件を課して $\boxed{\omega(t) = \omega_0\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)}$

。

（採点基準）後ほど追加します。配点 ??。(1)：。(2)：。(3)：。(4)：。