物理学 A 中間試験（渡慶次）

2024 年 5 月 23 日・9 時 30 分〜11 時 00 分（90 分間）

注意事項

1. 試験問題はこの裏面 1 枚。配布物はこの紙 1 枚，解答用紙 2 枚，計算用紙 1 枚。下線のものを提出すること。

2. 問題用紙と解答用紙の両方に学籍番号・氏名等の必要事項を記入すること。

3. 最終的な結果だけでなく，結果に至る過程（日本語を含む）も目で追える程度に詳しく書くこと。

4. 資料の持ち込みは一切不可。

5. 各大問に付随する小問はどのような順序で解いてもよい。

6. 問題の不備や条件不足が考えられる場合には，適宜修正のうえ，修正点を明記して解答すること。

以上

I. xy 面内の点 $(0, y_0)$ から質点 m を，x 軸と角度 θ をなす方向（$0 < \theta < \pi/2$）に初速 v_0 で投射する。地表（地面または床）を $y = 0$ とし，鉛直上向きに y 軸をとる。質点の運動は xy 平面内で行なわれるとする。m が運動を開始した時刻を $t = 0$，重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ。空気抵抗は考慮しない。

(1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し，質点の運動方程式を書け。x 成分と y 成分の各々を記すこと。

(2) 前問で記した運動方程式を解き，初期条件を満たす解を求めよ。［ヒント：初期条件は以下のように書ける］

$$x(0) = 0 \,, \qquad y(0) = y_0 \geq 0 \,, \qquad v_x(0) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0 \cos\theta \,, \qquad v_y(0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0 \sin\theta$$

(3) 質点の軌道の方程式を求めて，図示せよ。$t = 0$ での位置および最高点の x 座標を明記すること。

(4) 特に $y_0 = 0$ のとき，落下までに飛んだ水平距離 ℓ を θ の関数として表し，ℓ を最大にする θ を求めよ。

II. 滑らかな水平面上を弾性定数 k のばねに繋がれた質点 m が運動している。ばねの一端は壁に固定されており，その自然長位置を $x = 0$ とする。運動の開始時刻を $t = 0$ として，以下の問に答えよ。

(1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し，質点の運動方程式を書け。

(2) $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ とするとき，一般解が $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$（$a$ と b は定数）で与えられることを示せ。［ヒント：$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ が前問で書いた運動方程式（微分方程式）を満たすことを言えばよい］

(3) $t = 0$ でばねが x_0 だけ伸びた状態で質点を静かに離したとする。定数 a と b，従って $x(t)$ を決定せよ。

(4) 前問で求めた $x(t)$ に対して，運動エネルギーの一周期平均 $\langle K \rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$ とポテンシャル・エネルギーの一周期平均 $\langle V \rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{1}{2}kx^2$ が等しいことを示せ。ここで $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

III. 上空から直線的に落下する質点 m の運動を考える。質点には速度に比例する空気抵抗がはたらくとし，比例定数を μ とする。重力加速度の大きさを g とし，鉛直下向きに z 軸をとって以下の問に答えよ。質点は充分に高い位置から落下を始めるので，以下の設問では地表に到達してしまうことは考えない。

(1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し，質点の運動方程式を書け。

(2) 前問で書いた運動方程式を速度 $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ で書き換え，一般解 $v(t)$ を求めよ。また，初期条件 $v(0) = 0$ を満たす解を求めて図示せよ。図には終端速度 $v_{\mathrm{T}} \equiv \lim_{t\to\infty} v(t)$ の値を明記すること。

(3) 初期条件 $z(0) = z_0$ を満たす $z(t)$ を求めよ。

(4) 質点の力学的エネルギー（すなわち，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和）

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgz$$

は保存するか否か？理由とともに答えよ。計算によって示してもよいし，物理的な理由を述べてもよい。

IV. (1) 問題 **II.** において弾性定数 k の次元を，問題 **III.** において空気抵抗の比例定数 μ の次元を各々求めよ。

(2) ある振り子の周期 T が，振り子の長さ ℓ と重力加速度 g を用いて $T = 2\pi\ell^a g^b$ の形で与えられるとする。指数 a と b を決定し，T の表式を求めよ。比例定数 2π は次元を持たない。

V. 時間が余った人や，問題を解くのを諦めた人は，講義に対する感想や要望がもしあれば自由に述べてください。特にない場合は，まったく関係ない自由記述を行なってもかまいません。採点には一切影響しないものです。

以上

略解

各小問番号の後にある “npt” は加点箇所が n 箇所あることを示します。例えば，大問 **I.** (2) なら 4pt なので，加点箇所が 4 箇所あるということを表します。具体的にどことどこで加点されているかは，解答の最後にある（採点基準）を読んでください。各小問で 1pt が何点になるかは問題ごとに異なりますが，大問単位での配点は固定しました。

I. (1)（2pt）図は略（講義ノート等参照のこと）。運動方程式は

$$\underline{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0}\ ,\qquad \underline{m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-mg}\ . \tag{1}$$

(2)（4pt）(1) で書いた運動方程式をそれぞれ二回積分して，初期条件から任意定数をすべて定めればよい。x 成分を（両辺 m で約分してから）二回積分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0 \quad\longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c_1 \quad\longrightarrow\quad x(t)=c_1t+c_2\ .$$

同様に，y 成分を二回積分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-g \quad\longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-gt+c_3 \quad\longrightarrow\quad y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+c_3t+c_4\ .$$

与えられた初期条件から $c_1=v_0\cos\theta$，$c_2=0$，$c_3=v_0\sin\theta$，$c_4=y_0$ と決まるので，答は

$$\underline{x(t)=(v_0\cos\theta)t}\ ,\qquad \underline{y(t)=y_0+(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2}\ . \tag{2}$$

(3)（2pt）(2) で求めた x の表式から $t=x/v_0\cos\theta$。これを y の表式に代入して（媒介変数としての）t を消去すると

$$\underline{y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2+x\cdot\tan\theta+y_0}\ . \tag{3}$$

これが軌道の方程式。最高点の x 座標は平方完成して頂点の位置を見てもよいが，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$ から

$$\underline{x_{\text{最高点}}=\frac{v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}}\ . \tag{4}$$

(4)（2pt）$y_0=0$ のとき発射点と落下点は $x=x_{\text{最高点}}$ に関して対称なので，飛距離は $x_{\text{最高点}}$ の二倍となり

$$\underline{\ell=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}}\ . \tag{5}$$

これが最大となるのは $\sin 2\theta=1$ のときなので

$$\underline{\theta=\frac{\pi}{4}}\ . \tag{6}$$

（採点基準）配点 30。(1)：図と運動方程式で 1pt ずつ。運動方程式が二本とも正しく書けていれば図に多少の不備があっても満点。(2)：一般解が 1pt + 1pt，初期条件を満たす解が 1pt + 1pt。(3)：軌道の方程式が正しく書けていて 1pt（(2) の答，すなわち媒介変数表示，をそのまま書いたものには点を与えていない），最高点の x 座標が正しく求められていて 1pt。座標値の記入のない図には点を与えていない。(4)：ℓ の正しい式があって 1pt，$\theta=\pi/4$ が書けていて 1pt。何も書かずに急に $\theta=\pi/4$ と書いてある答案に最初は点を与えないつもりだったが，思い直して 1pt を与えた。
全体としてさすがによくできていました。

II. (1)（2pt）図は略（講義ノート等参照のこと）。運動方程式は

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx} \ . \tag{7}$$

(2)（2pt）(1) の運動方程式は $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$ と書ける。一方，$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t \ ,\\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t\\ &= -\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t)\\ &= -\omega^2 x\end{aligned}$$

なので，$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ は確かに運動方程式を満たす解となっている。さらに任意定数を二つ含むので，一般解を与える。

(3)（1pt）初期条件から $x(0) = a = x_0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t\right|_{t=0} = b = 0$ と決まるので

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x(t) = x_0\cos\omega t} \ . \tag{8}$$

(4)（2pt）直接計算する。(3) で求めた $x(t) = x_0\cos\omega t$ に対して $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -x_0\omega\sin\omega t$ なので

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{m\omega^2x_0^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\sin^2\omega t = \frac{m\omega^2x_0^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\\ &= \frac{m\omega^2x_0^2}{4T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{m\omega^2x_0^2}{4} \ ,\\ \langle V\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1}{2}kx^2 = \frac{kx_0^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\cos^2\omega t = \frac{kx_0^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\\ &= \frac{kx_0^2}{4T}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{kx_0^2}{4} \ .\end{aligned}$$

端点を代入するところでは $\omega T = 2\pi$ の関係を使った。さらに $k = m\omega^2$ なので両者は等しい。以上で示された。

（採点基準）配点 30。(1)：図と運動方程式で 1pt ずつ。運動方程式が正しく書けていれば図に多少の不備があっても満点。(2)：微分計算が正しくできていれば 2pt。一般解と言うためには本当は「定数が二つあるので」という記述が必要だがあまりにも書いていない答案が多かったので，計算の結果 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2x$ まで指摘できていれば満点を与えた。(3)：答えが出ていて 1pt。(4)：$\langle K\rangle$ が正しく計算されていて 1pt，$\langle V\rangle$ が正しく計算されていて 1pt。演習問題をやりすぎたせいか $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ として計算していた答案が複数あったが，自分で勝手に難しくしているだけなので計算が正しければ減点はしなかった。
全体としてそこまで良い出来とは言えませんでした。x は t の関数なのに $\int \mathrm{d}t\,x^2 = x^2 t$（??）という謎の計算をしたり，そもそも運動方程式を $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1$（急に出てきた x_1 ってなんですか？）などと書いてある答案が複数ありました。

III. (1)（2pt）図は略（講義ノート等参照のこと）。運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \ . \tag{9}$$

(2)（4pt）$v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ を使って (1) の運動方程式を書き換えると，$\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ なので

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \mu v \ . \tag{10}$$

これは $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu}{m}\left(v - \dfrac{mg}{\mu}\right)$ さらに

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - (mg/\mu)} = -\frac{\mu}{m}\,\mathrm{d}t$$

と変形することで変数分離形に帰着する。両辺を積分して（c'：定数）

$$\log\left(v - \frac{mg}{\mu}\right) = -\frac{\mu}{m}t + c'$$

したがって，$e^{c'} \equiv C$ と改めて一般解は

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + C\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) \ . \tag{11}$$

特に初期条件 $v(0) = mg/\mu + C = 0$ のとき，$C = -mg/\mu$ と決まり

$$v(t) = \frac{mg}{\mu}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\right] \ . \tag{12}$$

図は略（講義ノート等を参照)。終端速度は $v_{\mathrm{T}} = mg/\mu$。

(3)（2pt）(2) で求めた $v(t)$ を積分して

$$z(t) = \int \mathrm{d}t\, v(t) = \frac{mg}{\mu}\int \mathrm{d}t \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\right] = \frac{mg}{\mu}\left[t + \frac{m}{\mu}\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\right] + c \ .$$

ただし c は定数。初期条件が $z(0) = m^2g/\mu^2 + c = z_0$ と与えられているとき，$c = z_0 - m^2g/\mu^2$ と決まるので

$$z(t) = z_0 + \frac{mg}{\mu}t - \frac{m^2g}{\mu^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\right] \ . \tag{13}$$

(4)（1pt）空気抵抗の仕事の分だけ系の力学的エネルギーが損失するので保存しない。具体的な計算によって示すこともできる。便宜のため上向きを正にとって［このとき運動方程式は $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$］$E$ の時間変化を考えると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgz\right] = m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left(-mg - \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) + mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\mu\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\end{aligned}$$

となる。(2) より $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = v \neq 0$（unless $t \to \infty$）だから，一般に $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$，つまり力学的エネルギーは保存しない。空気抵抗力 $-\mu(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)$，単位時間あたりに質点が動く距離 $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ なので，単位時間あたりに空気抵抗力が質点にする仕事は $-\mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \times v = -\mu\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$ であって，確かに空気抵抗のする仕事の分だけエネルギーが損失していることが分かる。

（採点基準）配点 30。(1)：図と運動方程式で 1pt ずつ。運動方程式が正しく書けていれば図に多少の不備があっても満点。(2)：v で表した微分方程式が書けていて 1pt，一般解が出ていて 1pt，初期条件を満たす解が出ていて 1pt，終端速度付きの図があって 1pt。(3)：積分計算ができていて 1pt，初期条件を満たす解が出ていて 1pt。(4)：理由込みで保存していないと言えていて 1pt，と最初は思っていたが，思い直して保存しないとだけ書いてあるものには 1pt を与えた。

全体としてそこまで良い出来とは言えませんでした。問題文に「鉛直下向きを正」と書いてあるのに上向きを正にとって自滅している解答がいくつかありました。上向きを正にとっても正しいことが書かれていれば満点を与えるつもりでいましたが，残念ながらそのような答案はありませんでした。上向きを正にとると運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ となります。$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t < 0$（$z$ はつねに減少するのでその変化率 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ は負だから。あるいは，速度はつねに下向きだから，と思ってもよい）なので負号は正の向きによらずつねにマイナスです。

IV. (1)（2pt）$k = m\omega^2$ に注目して両辺の次元から $[k] = \left[m\omega^2\right] = \mathrm{MT}^{-2}$。空気抵抗の解に出てくる指数部を見て m/μ が時間の次元であるべき（指数や log 等の中身は無次元であることが望ましい）なので $[\mu] = \mathrm{MT}^{-1}$。

(2)（2pt）次元解析から $a = 1/2$，$b = -1/2$ と立つので $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$。

（採点基準）配点 10。(1) それぞれ 1pt ずつ。(2) a と b が正しく求められていて 1pt，$T = \sqrt{\ell/g}$ が出ていて 1pt，と思ったが緩くつけた。次元を聞いているのに $-\mathrm{MT}^2$ などと書いてある答案が多数あった。負号などいらず，さらに $[\cdots]$ と書くべきだがすべて正しく書けている人はほとんどいませんでした。