物理学 A 演習問題 #1

2024 年 4 月 11 日配布・4 月 18 日提出締切

1　ベクトル（力の合成・分解）

(1) xy 平面上の原点 O に置かれた物体に二つの力 $\boldsymbol{F}_1 = (5,\,7)$，$\boldsymbol{F}_2 = (3,\,-2)$ がはたらいている。この物体が受ける合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ を求め，図示し，大きさを求めよ。$\boldsymbol{F}$ が x 軸となす角 θ に対して $\tan\theta$ はいくつか。

(2) xy 平面上の原点 O に置かれた物体に $F = |\boldsymbol{F}| = 10\,\mathrm{N}$ の力がはたらいている。$\boldsymbol{F}$ が x 軸となす角が $\pi/6$ であるとき，$\boldsymbol{F}$ の x 成分と y 成分を求めよ。物体の質量を m とするとき，運動方程式はどのように書けるか？

2　三角関数・微積分（円運動）

原点 O を中心とする半径 r の円周上を運動する物体の位置は，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\,y(t)) = (r\cos\omega t,\,r\sin\omega t)$ と表せる。

(1) 速度 $\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$ と速さ $v = |\boldsymbol{v}|$，加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2 = (\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2,\,\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2)$ とその大きさ $a = |\boldsymbol{a}|$ を求めよ。これらはどのような向きであるか？［ヒント：$u = \omega t$ とおいて合成関数の微分法で

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(r\cos u)\right] \times \omega = -r\omega\sin u = -r\omega\sin\omega t$$

のように計算すればよい］

(2) 位置と速度が直交することを示せ。［ヒント：内積 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$ を計算してみよ］

3　次元解析

ある物理量 X があったとき，その次元を $[X]$ で表す。例えば，X としてニュートン（記号 N）を単位とする力 F を考えると，$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$ であるので，力の次元は $[F] = [\mathrm{N}] = \mathrm{MLT^{-2}}$ である。

(1) 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$$

の両辺では次元が等しいはずである。左辺の量の次元を具体的に調べることにより，このことを確認せよ。

(2) 線密度（単位長さあたりの質量）ρ，長さ ℓ の弦が大きさ T の張力を受けているとき，弦の出す音の振動数 f が $f = k\rho^x\ell^yT^z$ の形で表されるとする。k は無次元の比例定数とする。以下の問に答えよ。

(a) 両辺の次元を比較することで，指数が満たすべき以下の連立方程式を導け。

$$\begin{cases} x \qquad + \ \ z = 0 \\ -x + y + \ \ z = 0 \\ \qquad\quad - 2z = -1 \end{cases}$$

(b) (a) で導いた連立方程式を解くことで，f の表式を求めよ。得られた結果が直感に合うか考えてみよ。