

物理学 A 演習問題 #10

2024 年 6 月 13 日配布・6 月 20 日提出締切

1 ベクトル解析

二つの三次元ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に対して、外積（ベクトル積）は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

で定義される。以下の問に答えよ。

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を適当な三次元ベクトルとすると、次の四つの公式を示せ。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{0}, & \text{(b)} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \text{(c)} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, & \text{(d)} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \end{aligned}$$

(2) ベクトル三重積の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ を示せ。[右辺を見てバックキャブルールと呼ばれる]

(3) 三次元 xyz 空間において、各々の座標軸方向の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

に対して、内積は容易に確認できるように $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1$, $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$ である。外積について

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (2)$$

を示せ。

[注：第 12 回で導入される角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は、ベクトル積によって定義される物理量である。]

2 中心力

位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ にある質点 m が、 $r = |\mathbf{r}|$ だけ離れた質点 M から受ける万有引力ポテンシャルは

$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3)$$

である。以下の問に答えよ。

- (1) m の受ける力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ の各成分を求め、 $\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ と表されることを示せ。
(2) (1) で求めた \mathbf{F} について、 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ を示せ。

[注：一般に、等方的な中心力は保存力である。]