物理学 A 演習問題 #11

2024 年 6 月 20 日配布・6 月 27 日提出締切

1　三次元極座標

講義では二次元の極座標を扱ったが，一般の次元でも極座標は同様に定義される。例えば，三次元においては

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ , \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\ , \qquad z = r\cos\theta \tag{1}$$

によって極座標 $(r,\ \theta,\ \phi)$ が定義され，対応して基底ベクトルは以下の通り定義される。

$$\boldsymbol{e}_r \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\ , \qquad \boldsymbol{e}_\theta \equiv \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}\ , \qquad \boldsymbol{e}_\phi \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\phi}\ . \tag{2}$$

(1) 定義式 (2) に従って微分を実行することにより，$\boldsymbol{e}_\theta$ と $\boldsymbol{e}_\phi$ の成分を $\boldsymbol{e}_r$ と同様の形で求めよ。

(2) これまで扱ってきた直交座標（Descartes（デカルト） 座標）系における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ と極座標系における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{e}_\phi$ の間の変換則が，以下の通り与えられることを示せ。［ヒント：座標系の取り方でベクトルの成分は変わるけれども，位置を指し示すベクトルは変わらない：$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = r\boldsymbol{e}_r$ が成り立つ］

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z\ , \tag{3a}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z\ , \tag{3b}$$
$$\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y\ . \tag{3c}$$

(3) 極座標の基底で表したときの速度ベクトルの各成分が以下の通りになることを示せ。

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\ , \qquad v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\dot{\theta}\ , \qquad v_\phi = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\sin\theta = r\dot{\phi}\sin\theta \tag{4}$$

例えば v_θ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を極座標の基底で表したときの θ 成分を表す。ドット記号は t 微分：$\dot{X} \equiv \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$。

(4) 極座標の基底で表したときの加速度ベクトルの各成分が以下の通りになることを示せ。

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\ , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\ , \quad a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\ . \tag{5}$$

2　単振り子

長さ ℓ の糸の一端が原点 O に固定されており，他端に取り付けられた質点 m による振り子運動を考える。運動は鉛直面内で行なわれるとする。以下の問に答えよ。

(1) 質点 m の位置を直交座標系で見て $(x,\ y)$ とする。極座標系で見た加速度の r 成分 a_r と θ 成分 a_θ はどう書けるか？［ヒント：前の大問 (4) で $r = \ell = \mathrm{const.}$，$\phi = 0$ という二次元面内で運動が行なわれると考えよ。］

(2) 状況を図示し，糸の張力を S として，運動方程式の動径成分（r 成分）と角度成分（θ 成分）を書き下せ。［ヒント：動径成分は $ma_r = F_r$，角度成分は $ma_\theta = F_\theta$ と書けて，右辺の力は高等学校で学んだ知識から出る。］

(3) 振れ角が充分小さい（$|\theta| \ll 1$）とき，運動方程式の角度成分が単振動の形に帰着することを示せ。周期 T は？

(4) 初期条件 $\theta(t=0) = \theta_0$，$\dot{\theta}(t=0) = 0$ を満たす解 $\theta(t)$ を求めよ。また，このときの張力の時間変化も求めよ。

(5) 振れ角 θ が必ずしも小さくないときは，運動方程式を単振動の形に近似することができない。このときの振り子の周期 T は第一種完全楕円積分と呼ばれる特殊関数を用いて表されることが知られているが，この有限の θ の場合の振り子運動について自由に調べ，分かったことをまとめてみよ。余力のある者は導出も試すとよい。