物理学 A 演習問題 #12

期末試験対策（**試験日：2024 年 7 月 4 日・講義時間内**）などにお役立てください。解答の作成はいたしません。質問がある人は TA の佐藤さん（22rmu05@ms.dendai.ac.jp）か渡慶次（tokeshi@icrr.u-tokyo.ac.jp）まで。

1. （**単振動・エネルギー**）滑らかな水平面上を弾性定数 k のばねに繋がれた質点 m が運動している。ばねの一端は壁に固定されており，その自然長位置を $x=0$ とする。運動の開始時刻を $t=0$ として，以下の問に答えよ。
   (1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し，質点の運動方程式を書け。
   (2) $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ とするとき，一般解が $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$（$a$ と b は定数）で与えられることを示せ。［ヒント：$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ が前問で書いた運動方程式（微分方程式）を満たすことを言えばよい］
   (3) $t=0$ でばねが x_0 だけ伸びた状態で質点を静かに離したとする。定数 a と b，従って $x(t)$ を決定せよ。
   (4) 前問で求めた $x(t)$ に対して，運動エネルギーの一周期平均 $\langle K\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$ とポテンシャル・エネルギーの一周期平均 $\langle V\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1}{2}kx^2$ が等しいことを示せ。ここで $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

2. （**空気抵抗・エネルギー・仕事**）上空から直線的に落下する質点 m の運動を考える。質点には速度に比例する空気抵抗がはたらくとし，比例定数を μ とする。重力加速度の大きさを g とし，鉛直下向きに z 軸を取って以下の問に答えよ。質点は充分に高い位置から落下を始めるので，以下の設問では地表に到達してしまうことは考えない。
   (1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し，質点の運動方程式を書け。
   (2) 前問で書いた運動方程式を速度 $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ で書き換え，一般解 $v(t)$ を求めよ。また，初期条件 $v(0)=0$ を満たす解を求めて図示せよ。図には終端速度 $v_{\mathrm{T}} \equiv \lim_{t\to\infty} v(t)$ の値を明記すること。
   (3) 初期条件 $z(0)=0$ を満たす $z(t)$ を求めよ。［鉛直下向きに z 軸を取っているので $z(t) \le 0$ に注意せよ］
   (4) 以下では（一般解ではなく）設問 (2)(3) の初期条件を満たす解を用いて議論してよい。質点の力学的エネルギー（すなわち，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和）
   $$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(z)$$
   について，その時間変化 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ を計算せよ。［ポテンシャル $V(z)$ は設問 (1) の運動方程式から分かる］
   (5) 初期時刻 $t=0$ から別の時刻 $t=t_\star>0$ までに空気抵抗のした仕事
   $$W \equiv \int_0^{z_\star} \mathrm{d}z\left(-\mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \int_0^{t_\star}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left(-\mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$
   を計算せよ。ここで $z_\star \equiv z(t_\star)$ である。W と設問 (4) で計算した $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ の関係はどうなっているか？

3. （**減衰振動**）水平面上を弾性定数 k のばねに繋がれた質点 m が運動している。質点 m には速度に比例した抵抗力がはたらくとし，その比例係数を μ とする。ばねの一端は壁に固定されており，その自然長位置を $x=0$ とする。運動の開始時刻を $t=0$ として，以下の問に答えよ。
   (1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示せよ。さらに，質点の運動方程式が
   $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$
   という形で書かれることを説明し，定数 γ と ω_0 を m, k, μ の中から必要なものを用いて表せ。
   (2) 前問の運動方程式の解を $x = e^{\lambda t}$ の形で置いたとき，適切な二つの λ を $\lambda_+ \ge \lambda_-$ とする。λ_+ と λ_- を設問 (1) で導入した γ と ω_0 で表せ。さらに，以下の各々の場合に一般解を記せ：
      (a) $\lambda_+ > \lambda_-$ の場合，
      (b) $\lambda_+ = \lambda_-$ の場合。

(3) 前問において特に $\gamma < \omega_0$，すなわち解が減衰振動の振る舞いを示す場合について，一般解が

$$x(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)\ , \qquad a\ \text{と}\ b\ \text{は定数}$$

と書けることを示せ。ただし $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ とした。

(4) 初期条件 $x(0) = x_0$，$v(0) = 0$ を満たす解を求めよ。

4.（**強制振動**）水平面上を弾性定数 k のばねに繋がれた質点 m が運動している。質点 m には周期的な外力 $F = F_0\cos\omega t$ が加えられている。ばねの一端は壁に固定されており，その自然長位置を $x = 0$ とする。運動の開始時刻を $t = 0$ として，以下の問に答えよ。

(1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示せよ。さらに，質点の運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

という形で書かれることを説明し，定数 ω_0 と f_0 を m, k, F_0 の中から必要なものを用いて表せ。

(2) 対応する同次微分方程式の一般解を記せ。

(3) 運動方程式の特殊解を $x_{\mathrm{P}}(t) = A\cos\omega t$ と仮定したとき，振幅 A を求めて ω_0, ω, f_0 により表せ。

(4) 初期条件 $x(0) = x_0$，$v(0) = 0$ を満たす解を求めよ。

5.（**運動の定性的理解・単振動**）ポテンシャル

$$V(x) = -\frac{g^2}{x} + \frac{h^2}{x^2} \qquad (x > 0) \tag{1}$$

の下で一次元運動を行なう質点 m を考える。

(1) 運動方程式 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$ において $F = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ の関係があることを思い出し，m の運動方程式を書け。

(2) $V'(x_\star) = \mathrm{d}V/\mathrm{d}x\big|_{x=x_\star} = 0$ を満たす $x_\star$ を求め，$V(x)$ の概形を図示せよ［ヒント：増減表を描いてみよ］。極小点 $x_\star$ でのポテンシャルの値 $V(x_\star)$ の値を明記すること。

(3) m の力学的エネルギー E が $V(x_\star) < E < 0$ の範囲にあるとき，運動の禁制領域と許容領域を図示せよ。特に許容領域が $(-g^2 - \sqrt{g^4 + 4Eh^2})/2E < x < (-g^2 + \sqrt{g^4 + 4Eh^2})/2E$ で与えられることを示せ。

(4) ポテンシャルは極小点付近でほとんど二次関数とみなせるため，運動を単振動で近似することができる。極小点 $x_\star$ の周りでポテンシャルを展開すると

$$V(x) \simeq V(x_\star) + \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_\star}(x - x_\star) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_\star}(x - x_\star)^2$$

と書ける。設問 (2) の結果から $V(x_\star)$ と $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x\big|_{x=x_\star}$ は既知であり，特に $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x\big|_{x=x_\star} = 0$ であった。ポテンシャルの近似形を

$$V(x) \simeq V(x_\star) + \frac{1}{2}k(x - x_\star)^2$$

と書いたときの $k = \cancel{2}\ \mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2\big|_{x=x_\star}$ を求めよ。

(5) m が設問 (3) の許容領域にあるとき，設問 (1) と (4) から運動方程式を単振動の形に書くことができることを説明せよ。

(6) 設問 (5) の運動方程式について，初期条件 $x(t) = x_0$, $v(t) = 0$ を満たす解を求めよ。

6.（**単振り子・角運動量・単振動**）長さ ℓ の糸の一端が原点 O に固定されており，他端に取り付けられた質点 m による振り子運動を考える。運動は xy 面内で行なわれるとし，鉛直下向きに x 軸を取る。

(1) 質点 m の位置を直交座標系で見て $\boldsymbol{r} = (x,\,y,\,z)$ とするとき，極座標表示を使って $\boldsymbol{r} = (\ell\cos\theta,\,\ell\sin\theta,\,0)$ と表せる（基底は $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ のまま，つまり極座標に移ったわけではないことに注意）。速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(2) 原点 O 周りの質点の角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ を求めよ。

(3) 質点にはたらく力をすべて列挙し，点 O 周りのモーメントが $\boldsymbol{N} = (0,\, 0,\, -mg\ell\sin\theta)$ で与えられることを示せ。［ヒント：重力 $\cancel{\boldsymbol{W} = (0,\, mg,\, 0)}$ $\boldsymbol{W} = (mg,\, 0,\, 0)$ と張力 $\boldsymbol{S} = (-S\cos\theta,\, -S\sin\theta,\, 0)$］

(4) 設問 (2)(3) の結果から，回転運動の運動方程式はどのように書けるか？ x, y, z 成分各々について記せ。

(5) 設問 (4) において，θ が小さいときに単振動の方程式に帰着することを示し，初期条件 $\theta(0) = \theta_0,\, \dot{\theta}(0) = 0$ を満たす解 $\theta(t)$ を求めよ。

7. **（有限物体からの万有引力：ヒマな人向け）** 高等学校で暗記させられた万有引力公式 $F = -GMm/R^2$ は，良く考えると M も m も質点であることを暗に仮定していた（地球や惑星が質点だと思って計算していた）。しかし，実は（簡単のため M だけが）大きさを持っていてもこの公式が正しいことを以下の誘導に従って示す。すなわち，質量 M，半径 r_0 の球の中心から R だけ離れた点において，質点 m が受ける力を導く。球の密度 ρ は一様（場所に依らず一定）とせよ。

(1) 球の中心を原点 O に取り，質点 m が x 軸上にある：$(r, 0, 0)$ として一般性を失わない。いきなり球全体を考えるのは難しいので，球の微小部分（体積 $\mathrm{d}V$，質量 $\mathrm{d}M = \rho\mathrm{d}V$）と m によるポテンシャル $\mathrm{d}U$ を書き下せ。微小部分 $\mathrm{d}V$ の位置を極座標表示で (r, θ, ϕ) とする。［答：$\mathrm{d}U = -Gm(\rho\,\mathrm{d}V)/\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$］［ヒント：図を描け。O，$\mathrm{d}V$，$m$ がなす三角形に対して余弦定理］

(2) 球全体からのポテンシャルは，設問 (1) で考えた微小体積からの寄与を球全体で足し上げて（積分して）

$$U = \int \mathrm{d}U = -Gm\rho \int_0^{r_0} r^2 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}}$$

と表せる。ϕ 積分は直ぐに実行でき，その後 θ 積分は微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta} = \frac{rR\sin\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}}$$

を使えば実行できる。以上から，U の表式は r 積分だけを残して以下の通りになることを示せ。

$$U = -\frac{2\pi Gm\rho}{R}\int_0^{a} \mathrm{d}r\, r\left[\sqrt{(r+R)^2} - \sqrt{(r-R)^2}\right] .$$

(3) 以下，簡単のため $R > r_0$，すなわち，質点 m は球の外側にあるとする。このとき，設問 (2) で残った r 積分を実行し，高等学校で見慣れたポテンシャルの式：$U = -GMm/R$ が出ることを示せ。この結果は，M が有限の大きさを持っていても質点とみなして万有引力公式を適用してよいことを示すものである。

(4) 設問 (3) の結果から，質点 m が受ける力 F を求めよ。$0 < R < r_0$ の場合は結果はどう変更されるか？

8. **（角運動量・万有引力・楕円軌道：ヒマな人向け）** 質量 M の太陽と質量 m の惑星が万有引力を及ぼしあって実現する運動について，以下の問に答えよ。

(1) 系の力学的エネルギーは M と m の換算質量 $\mu \equiv Mm/(M+m)$ を使って以下の通り与えられる。

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - G\frac{Mm}{r} . \tag{2}$$

角運動量保存の法則から $mr^2\dot{\theta} \equiv \ell$ は一定となる。ℓ を用いて (2) 式から $\dot{\theta}$ を消去し，以下の式を導け。

$$\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{E - \widetilde{V}}\ , \qquad \widetilde{V} \equiv \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} . \tag{3}$$

(3) 前問の (3) 式の両辺を $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\theta) = \sqrt{2/\mu}\sqrt{E - \widetilde{V}}(\mu r^2/\ell)$ で割り，両辺を θ で積分することで，軌道の式

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}\ ; \qquad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^2\mu}}\ , \qquad p \equiv \frac{\ell^2}{GMm\mu} \tag{4}$$

を導け。必要であれば，積分公式 $\cancel{\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2 + bx - c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\left(\frac{bx - 2c}{x\sqrt{b^2 + 4ac}}\right)}$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2 + bx - c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\arctan\left[\frac{bx - 2c}{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx - c}}\right]$ を使って良い。

(3) 前問の結果において，極座標 (r, θ) から直交座標 (x, y) に戻るには，$\cos\theta = x/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を使えば良い。このとき，(4) 式が

$$(1-\varepsilon^2)\left(x + \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} \tag{5}$$

となることを導き，(a) $0 < \varepsilon < 1$ の場合（楕円軌道），(b) $\varepsilon > 1$ の場合（双曲線軌道）に分けて図示せよ。

(4) 設問 (1) で導入した $\widetilde{V}$（有効ポテンシャルと呼ばれる）の概形を図示し，系の力学的エネルギー E が (a) $E < 0$ の場合，(b) $E > 0$ の場合の許容領域を調べよ。これらが設問 (3) における楕円軌道，双曲線軌道の場合にそれぞれ対応することを説明せよ。