物理学 A 演習問題 #3

2024 年 4 月 25 日配布・5 月 2 日提出締切

1　二物体の衝突（モンキー・ハンティング）

時刻 $t = 0$ に原点 O から，x 軸からはかって角度 θ の向きに初速 v_0 で小球 A を投げる（$0 < \theta < \pi/2$）。これと同時に，位置 (x_1, y_1) から別の小球 B が静かに鉛直下方に落ち始めた。$v_0, x_1, y_1 > 0$ として，以下の問に答えよ。

(1) 状況を図示し，小球 A および B の運動方程式を記せ。x 方向，y 方向それぞれ二本ずつの運動方程式が立つ。
(2) 小球 B の運動方程式を解け。初期条件を考慮すること。x 方向，y 方向はそれぞれどのような運動であるか？
(3) 小球 A の運動方程式を解け。初期条件を考慮すること。x 方向，y 方向はそれぞれどのような運動であるか？
(4) 二つの小球 A と B を空中で衝突させたい。$\tan\theta$ をいくらに取ればよいか。また衝突時刻 t_{C} を求めよ。
(5) 二つの小球 A と B が空中で（つまり B が落下する前に）衝突するために必要な初速 v_0 の最小値を求めよ。

2　有限の高さからの斜方投射

講義では，x 軸からはかって角度 θ の向きに初速 v_0 で，原点 O から小球を投げる状況を考え，投射角が $\theta = \pi/4$ のときに投射距離が最大となることを見た。ここでは，時刻 $t = 0$ において有限の高さ $y_0 > 0$ から小球を投げる状況を考え，飛距離を最大にする場合の投射角について議論する。すなわち，初期条件として

$$x(0) = 0\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0\cos\theta\,, \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0\sin\theta \tag{1}$$

を与える。

(1) 初期条件 (1) の下で運動方程式を解き，時刻 t における小球の位置 $(x(t), y(t))$ を求めよ。
(2) 小球が地面に到達する時刻を t_{C} とする。小球の水平方向の飛距離 $\ell(\theta) \equiv x(t_{\mathrm{C}})$ が

$$\ell(\theta) = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}}\right) \tag{2}$$

となることを示せ。
(3) 次を確認せよ。
(a)（検算）$y_0 \to 0$ のとき，講義で導いた飛距離が再現されること。
(b) y_0 が十分大きいとき（つまり，十分に高い位置から投げ出すとき），$\ell(\theta) \approx v_0\sqrt{\dfrac{2y_0}{g}}\cos\theta$ となること。
(4) $\ell(\theta)$ を最大にする角度 θ_{M} を見出すために，(2) 式を θ で微分して $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}\theta = 0$ を解くことで

$$\sin\theta_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1 + gy_0/v_0^2}} \tag{3}$$

を導け。［ヒント：$u = \sin\theta$ と置いて $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}\theta = (\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta)\cdot(\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}u) = \cos\theta\cdot(\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}u)$ と計算するとよい］
(5) これまでに導いたことから，以下の文章の空欄を埋めよ。**イ** と **ロ** には角度の値を入れ，**ハ** はいずれかを選べ。
飛距離を最大にする投射角 θ_{M} は，$y_0 = 0$ のとき $\theta_{\mathrm{M}} = \boxed{\text{イ}}$，$y_0$ が十分大きいとき $\theta_{\mathrm{M}} = \boxed{\text{ロ}}$ である。一般の y_0 に対しては，θ_{M} は $\boxed{\text{イ}}$ よりも $\boxed{\text{ハ}}$ { ① 小さな，② 大きな } 値である。