物理学 A 演習問題 #5

2024 年 5 月 9 日配布・5 月 16 日提出締切

1　単振動の運動方程式

弾性定数 k のばねに鉛直方向に吊るされた質点 m の運動を考える。ばねの自然長を $x=0$ とし，座標軸は鉛直下向きに取るものとする。以下の問に答えよ。

(1) 質点 m の釣り合いの位置（質点にはたらく復元力と重力が釣り合う位置 ）$\bar{x}$ を求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ に位置 $x_0 > \bar{x}$ に質点を移動させ，静かに手を離すと質点は振動を始めた。状況を図示し，運動方程式を立てよ。図には自然長の位置，質点の座標，質点にはたらく力を明記すること。振動中心の x 座標は？

(3) 変数変換 $x \mapsto X \equiv x - \bar{x}$ を行なうことにより，質点の運動方程式が

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -kX \tag{1}$$

に帰着することを示せ。

(4) (1) 式の一般解を求めよ。また，初期条件を満たす解 $x(t)$ を求めよ。

2　単振動の運動方程式の別の解法

講義では「二回微分すると負号が出てきて元に戻る関数」として三角関数の存在を思い出し，一般解を得た。ここでは，単振動の方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x = (i\omega)^2 x \tag{2}$$

と書き換え（三角関数ではなく）指数関数と結びつけて運動方程式 (2) を解いてみる。ただし $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位，また $\omega = \sqrt{k/m}$ は角振動数である。初期条件は $x(0)=x_0$, $v(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ として，以下の問に答えよ。

(1) $f(t) = e^{i\omega t}$ と $g(t) = e^{-i\omega t}$ に対して，$f'(t)$, $f''(t)$, $g'(t)$, $g''(t)$ を計算せよ。

(2) 設問 (1) の結果から，運動方程式 (2) の一般解はどのように書けるか？

(3) 初期条件を適用して一般解に含まれる二つの任意定数を決定し，解が講義で得たものと一致することを示せ。

(4)（文脈外だが）設問 (2) で書いた一般解を三角関数 cos, sin で表せ。任意定数をうまく取り直すことで $x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ に帰着し，したがって三角関数で一般解を与える方法と等価であることを示せ。［ヒント：$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を使う］

3　単振動のエネルギー保存則

(1) 一般解の表示 $x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ とその微分を力学的エネルギーの式

$$E \equiv \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{3}$$

に代入することで，系の力学的エネルギーが保存する（すなわち，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$ となる）ことを直接的に示せ。

(2) 次式で定義される運動エネルギー，ポテンシャルエネルギーの一周期の時間平均について，$\langle K\rangle = \langle V\rangle$ を示せ。

$$\langle K\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, K = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2, \qquad \langle V\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, V = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{1}{2}kx^2\ . \tag{4}$$