物理学 A 演習問題 #6

2024 年 5 月 16 日配布・5 月 30 日提出締切

0　中間試験に関する連絡

実施日程　2024 年 5 月 23 日

実施時間　90 分

連絡事項　講義時間内で実施します（9 時 30 分〜11 時 00 分 or 11 時 20 分 〜12 時 50 分）

1　空気抵抗を受けながら落下する質点

時刻 $t=0$ に位置 $z=z_0>0$ から静かに落下し始めた質点が，速度に比例する空気抵抗 $-k\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ を受けている。以下の問に答えよ。

(1) 状況を図示し，位置 $z=z(t)$ が満たす運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=g \tag{1}$$

で与えられることを示せ。空気抵抗はどのような場合に無視でき，あるいは無視できないか？

講義では，運動方程式 (1) を $v=\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ に関するものに書き換えて，変数分離形に帰着させて解を求めた。ここでは，別の求め方で (1) を解いてみる。

(2) 微分方程式 (1) をよく見ると「二回微分したものと，一回微分して定数 k/m を掛けたものを足すと，定数 g になる」ことが分かる。したがって，演習 #2-**1** で扱った方法が使えそうである。すなわち，(1) を満たす解を簡単なものから $z=c$（定数），$z=at+b$，$z=at^2+bt+c$，$\cdots$ と試していくと，一次式 $z=at+b$ が候補になりうる（$\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$ の項は落ちて，$(k/m)\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ が定数になるので，a と b を適当に取れば右辺の定数 g にできるから）。このとき，初期条件と合わせて定数 a と b を決定せよ。

(3) ところで，微分方程式 (1) の右辺を 0 と置いた別の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{z}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}\widetilde{z}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2}$$

を考える。(2) 式の解を $\widetilde{z}(t)=e^{\lambda t}$ と仮定する。このとき，λ が満たす方程式を導き，可能な λ の値を求めよ。

(4) 前問で求めた $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ に対して，微分方程式 (2) の一般解は $\widetilde{z}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$ と書ける。一方，設問 (2) で「発見」した微分方程式 (1) を満たす関数（特解という）を $z_{\mathrm{P}}(t)=at+b$ とすると，(1) 式の一般解は

$$z(t)=z_{\mathrm{P}}(t)+\widetilde{z}(t)=z_{\mathrm{P}}(t)+c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \tag{3}$$

と与えられる。初期条件を用いて定数 c_1 と c_2 を決定せよ。

[注：ここで扱った方法は，減衰振動や強制振動の微分方程式を解くときにまた出てきます]