

物理学 A 中間試験 (渡慶次)

2024 年 5 月 23 日・90 分間

注意事項

1. 試験問題はこの裏面 1 枚。配布物はこの紙 1 枚, 解答用紙 2 枚, 計算用紙 1 枚。下線のものを提出すること。
2. 問題用紙と解答用紙の両方に学籍番号・氏名等の必要事項を記入すること。
3. 最終的な結果だけでなく, 結果に至る過程 (日本語を含む) も目で追える程度に詳しく書くこと。
4. 資料の持ち込みは一切不可。
5. 各大問に付随する小問はどのような順序で解いてもよい。
6. 問題の不備や条件不足が考えられる場合には, 適宜修正のうえ, 修正点を明記して解答すること。

以上

- I. xy 面内の点 $(0, y_0)$ から質点 m を, x 軸と角度 θ をなす方向 ($0 < \theta < \pi/2$) に初速 v_0 で投射する。地表 (地面または床) を $y = 0$ とし, 鉛直上向きに y 軸をとる。質点の運動は xy 平面内で行なわれるとする。 m が運動を開始した時刻を $t = 0$, 重力加速度の大きさを g として, 以下の間に答えよ。空気抵抗は考慮しない。
- (1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し, 質点の運動方程式を書け。 x 成分と y 成分の各々を記すこと。
 - (2) 前問で記した運動方程式を解き, 初期条件を満たす解を求めよ。[ヒント: 初期条件は以下のように書ける]

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0, \quad v_x(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \cos \theta, \quad v_y(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \sin \theta$$

- (3) 質点の軌道の方程式を求めて, 図示せよ。 $t = 0$ での位置および最高点の x 座標を明記すること。
- (4) 特に $y_0 = 0$ のとき, 落下までに飛んだ水平距離 l を θ の関数として表し, l を最大にする θ を求めよ。

- II. 滑らかな水平面上を弾性定数 k のばねに繋がれた質点 m が運動している。ばねの一端は壁に固定されており, その自然長位置を $x = 0$ とする。運動の開始時刻を $t = 0$ として, 以下の間に答えよ。

- (1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し, 質点の運動方程式を書け。
- (2) $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ とするとき, 一般解が $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ (a と b は定数) で与えられることを示せ。
[ヒント: $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ が前問で書いた運動方程式 (微分方程式) を満たすことを言えばよい]
- (3) $t = 0$ でばねが x_0 だけ伸びた状態で質点を静かに離れたとする。定数 a と b , 従って $x(t)$ を決定せよ。
- (4) 前問で求めた $x(t)$ に対して, 運動エネルギーの一周期平均 $\langle K \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ とポテンシャル・エネルギーの一周期平均 $\langle V \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} k x^2$ が等しいことを示せ。ここで $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

- III. 上空から直線的に落下する質点 m の運動を考える。質点には速度に比例する空気抵抗がはたらくとし, 比例定数を μ とする。重力加速度の大きさを g とし, 鉛直下向きに z 軸をとって以下の間に答えよ。質点は充分に高い位置から落下を始めるので, 以下の設問では地表に到達してしまうことは考えない。

- (1) 質点にはたらく力を座標軸とともに図示し, 質点の運動方程式を書け。
- (2) 前問で書いた運動方程式を速度 $v = dz/dt$ で書き換え, 一般解 $v(t)$ を求めよ。また, 初期条件 $v(0) = 0$ を満たす解を求めて図示せよ。図には終端速度 $v_T \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ の値を明記すること。
- (3) 初期条件 $z(0) = z_0$ を満たす $z(t)$ を求めよ。
- (4) 質点の力学的エネルギー (すなわち, 運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和)

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz$$

は保存するか否か? 理由とともに答えよ。計算によって示してもよいし, 物理的な理由を述べてもよい。

- IV. (1) 問題 II. において弾性定数 k の次元を, 問題 III. において空気抵抗の比例定数 μ の次元を各々求めよ。
(2) ある振り子の周期 T が, 振り子の長さ l と重力加速度 g を用いて $T = 2\pi l^a g^b$ の形で与えられるとする。指数 a と b を決定し, T の表式を求めよ。比例定数 2π は次元を持たない。

- V. 時間が余った人や, 問題を解くのを諦めた人は, 講義に対する感想や要望がもしあれば自由に述べてください。特にならぬ場合は, まったく関係ない自由記述を行なってもかまいません。採点には一切影響しないものです。

以上