

物理学 A 演習問題 #8

2024 年 5 月 30 日配布・6 月 6 日提出締切

1 二階非同次線型常微分方程式

一般に, a_0, a_1, a_2 を定数として

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(x) \quad (1)$$

の形の微分方程式を定係数二階非同次線型常微分方程式と呼ぶ。(1) 式の一般解 $x(t)$ は, 対応する同次微分方程式の一般解 $\tilde{x}(t)$ と (1) 式の特解 $x_P(t)$ を用いて, $x(t) = \tilde{x}(t) + x_P(t)$ と与えられるのであった。(1) 式の特殊な場合として, $a_2 = m, a_1 = a_0 = 0, f(t) = -mg$ と置けば (ついでに x の代わりに z と書いて)

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad (2)$$

となる。すなわち, 自由落下の運動方程式は最も簡単な二階非同次線型常微分方程式とみなせる。以下の問に答えよ。

- (1) 対応する同次微分方程式の一般解 $\tilde{z}(t)$ を求めよ。
- (2) (2) 式の特解を一つ求めよ。[ヒント: $z_P(t) = at^2 + bt + c$ の形で置いて, 定数を決定せよ。]
- (3) (2) 式の一般解を求め, 既に良く知っている自由落下の解が再現されていることを確認せよ。

2 RLC 直列回路 (減衰振動)

抵抗 R , コンデンサ C , コイル L を直列に繋いだ回路を考える。回路方程式 (キルヒホッフの第二法則) は

$$RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (3)$$

で与えられる。 I は回路を流れる電流, Q はコンデンサが蓄える電荷であり, 連続方程式 $I = dQ/dt$ の関係がある。

- (1) 微分方程式 (3) を $Q(t)$ に関する二階の微分方程式に書き直せ。さらに, 抵抗の大きさ $\gamma \equiv R/2L$, 振動数 $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ の減衰振動の方程式となっていることを説明せよ。
- (2) 解が減衰振動となる条件を R, L, C で表し, さらに初期条件 $Q(0) = Q_0, \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0$ を満たす解を求めよ。

[注: 交流電圧 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ が印加されている場合は強制振動の運動方程式になる。]

3 抵抗がある場合の強制振動

講義では, 振動する物体に周期的な外力が加わっている場合を扱った。ここでは, 同じ系に速度に比例する抵抗力 $-\mu(dx/dt)$ が加わる場合を解析する。

- (1) 運動方程式が

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (4)$$

の形で与えられることを説明し, γ, ω_0, f_0 の具体的な形を与えよ。

- (2) 今回は抵抗力がはたらいっているので, 特殊解を $x_P(t) = A \sin \omega t$ と仮定すると失敗する。代わりに $x_P(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$ と置いて微分方程式 (4) に代入し, A と $\tan \theta_0$ を求めよ。