

物理学 A 演習問題 #9

2024 年 6 月 6 日配布・6 月 13 日提出締切

1 変数分離形の微分方程式

講義第 6 回で、空気抵抗下における落下運動を扱ったことは記憶に新しい。運動方程式は（鉛直下向きに z 軸を取ると） $m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - \mu \frac{dz}{dt}$ となり、これは $v \equiv dz/dt$ で書き換えると $m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v$ となって、 $\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} \left(v - \frac{mg}{\mu} \right)$ すなわち変数分離形に書き換えられるので、最終的に解くことができるのであった。このように、 x の関数 $y = y(x)$ が満たす微分方程式が $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ の形に変形できるとき、変数分離形と呼ぶのであった。以下の各々について一般解を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} & (2) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} & (3) \frac{dy}{dx} = -2xy \\ (4) \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 & (5) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1} & (6) \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x+1} \\ (7) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} & (8) \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin y} & (9) \frac{dy}{dx} = y \sin x \end{array}$$

2 変数分離形の微分方程式（電気回路）

(1) 直流電源 E （＝一定）、抵抗 R 、コンデンサ C が直列に繋がれた回路を考える。

(a) (a) 回路方程式（Kirchhoff の第二法則）が $0 = E - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C}$ で与えられることを説明せよ。[ヒント：抵抗について Ohm の法則より $V_R = RI$ 、コンデンサについて $V_C = Q/C$ 、これと連続方程式 $I = dQ/dt$]

(b) (a) の回路方程式が変数分離形であることを指摘し、 $Q(t)$ の一般解を求めよ。電流 $I(t)$ はどうなるか？

(c) 初期条件 $Q(0) = 0$ を満たす解を求めて図示せよ。 $V_R(t) = RI(t)$ と $V_C(t) = Q(t)/C$ も図示してみよ。

結果は妥当であるか？ [注：指数関数の部分を $\exp(-t/\tau)$ と書いたときの $\tau = RC$ は時定数と呼ばれる]

(2) (1) の設定で電源 E が無い場合を考える。回路方程式 $0 = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$ について、(1) の設問 (a)(b)(c) を繰り返せ。ただし、 $Q(t)$ に関する初期条件を $Q(0) = Q_0 > 0$ とせよ [$Q(0) = 0$ のままでどのような状況か？]。

(3) 余力のあるひとは、コンデンサ C をコイル L に取り替えた場合（ RL 回路）なども考えてみよ。コイル L とコンデンサ C のみからなる LC 回路は電気振動の名前の通り単振動型の方程式になり、高等学校でならった共振周波数の公式 $f = 1/2\pi\sqrt{LC}$ やエネルギー保存の関係式 $LI^2/2 + CV^2/2 = \text{const.}$ が導出できたりする。

3 減衰振動・強制振動の微分方程式

講義第 8 回と演習 #8（ RLC 直列回路の問題）で扱ったように、減衰振動型の微分方程式は、解を $e^{\lambda t}$ の形で置き、適切な λ を求めることで一般解が得られるのであった。以下の各々について一般解を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 9y = 0 & (2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 & (3) \frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 0 \\ (4) \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0 & (5) \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} - 5y = 5x + 6 & (6) \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = \cos 3x \end{array}$$

[ヒント：(5) の特解は $y_P = ax + b$ の形、(6) の特解は $y_P = a \cos 3x + b \sin 3x$ の形と予想できる。]