

物理学 A 演習問題 #6 略解

1 空気抵抗を受けながら落下する質点

時刻 $t = 0$ に位置 $z = z_0 > 0$ から静かに落下し始めた質点が、速度に比例する空気抵抗 $-k dz/dt$ を受けている。以下の問に答えよ。

- (1) 状況を図示し、位置 $z = z(t)$ が満たす運動方程式が

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dz}{dt} = g \quad (1)$$

で与えられることを示せ。空気抵抗はどのような場合に無視でき、あるいは無視できないか？

■略解 図示は略。質点を受ける力は鉛直下向きの重力 $-mg$ (符号込み) と鉛直上向きの空気抵抗 $-k dz/dt$ (符号込み) の二つのみである。そこで z 軸を鉛直下向きにとると、運動方程式は $m(d^2z/dt^2) = mg - k(dz/dt)$ と書ける。両辺を m で割れば示したい式。空気抵抗が無視できるのは k/m が非常に小さいときなので、質量がとても重い、または k が非常に小さいとき。質量がとても重いと空気抵抗に比べて重力の効果がずっと大きいので空気抵抗はほとんど考える意味がないということ。逆にとても軽い場合には空気抵抗が重要になる。これは k/m がとても大きいことから理解できる。

講義では、運動方程式 (1) を $v = dz/dt$ に関するものに書き換えて、変数分離形に帰着させて解を求めた。ここでは、別の求め方で (1) を解いてみる。

- (2) 微分方程式 (1) をよく見ると「二回微分したものと、一回微分して定数 k/m を掛けたものを足すと、定数 g になる」ことが分かる。したがって、演習 #2-1 で扱った方法が使える。すなわち、(1) を満たす解を簡単なものから $z = c$ (定数), $z = at + b$, $z = at^2 + bt + c$, \dots と試していくと、一次式 $z = at + b$ が候補になりうる (d^2z/dt^2 の項は落ちて、 $(k/m)dz/dt$ が定数になるので、 a と b を適当に取れば右辺の定数 g にできるから)。このとき、初期条件と合わせて定数 a と b を決定せよ。

■略解 $z = at + b$ に対して $dz/dt = a$, $d^2z/dt^2 = 0$ なので (1) 式に代入すると $(k/m)a = g$ より $a = \boxed{mg/k}$ 。また初期条件から $z(0) = b = \boxed{z_0}$ 。以上で定数が決まり、 $z(t) = (mg/k)t + z_0$ 。

- (3) ところで、微分方程式 (1) の右辺を 0 と置いた別の微分方程式

$$\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{d\tilde{z}}{dt} = 0 \quad (2)$$

を考える。(2) 式の解を $\tilde{z}(t) = e^{\lambda t}$ と仮定する。このとき、 λ が満たす方程式を導き、可能な λ の値を求めよ。

■略解 $\tilde{z}(t) = e^{\lambda t}$ に対して $d\tilde{z}/dt = \lambda e^{\lambda t}$, $d^2\tilde{z}/dt^2 = \lambda^2 e^{\lambda t}$ なので (2) に代入すると $[\lambda^2 + (k/m)\lambda]e^{\lambda t} = 0$ 。したがって $\lambda^2 + (k/m)\lambda = 0$ 。よって $\lambda = \boxed{0, -k/m}$ 。

- (4) 前問で求めた $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ に対して、微分方程式 (2) の一般解は $\tilde{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ と書ける。一方、設問 (2) で「発見」した微分方程式 (1) を満たす関数 (特解という) を $z_P(t) = at + b$ とすると、(1) 式の一般解は

$$z(t) = z_P(t) + \tilde{z}(t) = z_P(t) + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3)$$

と与えられる。初期条件を用いて定数 c_1 と c_2 を決定せよ。

■略解 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -k/m$ とする。問題文より $\tilde{z}(t) = c_1 + c_2 e^{-(k/m)t}$ である。また設問 (2) より $z_P(t) = (mg/k)t + z_0$ である。したがって、再び問題文より一般解は $z(t) = (mg/k)t + z_0 + c_1 + c_2 e^{-(k/m)t}$ と与

えられることになる。初期条件より $z(0) = c_1 + c_2 = z_0$, $v(0) = mg/k - (k/m)c_2 = 0$ だから、この連立方程式を解いて $c_1 = \boxed{z_0 - m^2g/k^2}$, $c_2 = \boxed{m^2g/k^2}$ 。ゆえに

$$z(t) = z_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \right].$$

これは講義で導出したものと確かに同じ表式を与えている（ここで k と書いているものは講義では μ と書いていました）。

[注：ここで扱った方法は、減衰振動や強制振動の微分方程式を解くときにまた出てきます]

2 単振動の運動方程式の別の解法 II (難)

「二度微分すると負号が出てきて元に戻るの sin と cos だ」と言われても、言われればそうだが思いつくのは難しいと文句を言いたい人も多いと思う。ここでは、物理で出てくる多くの微分方程式に有効な別の方法（級数展開の方法・Frobenius の方法）を紹介する。この問題は簡単ではないので、試験には関係がないことを注意しておく。

2.1 (準備) 三角関数の級数表示

病的な振る舞いをしない適当な関数 $f(x)$ は x の^{べき}幕で展開することができる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots \quad (4)$$

これを $f(x)$ の^{マクローリン}Maclaurin 展開と呼び、^{テイラー}Taylor 展開の特殊な場合である。記号 $f^{(n)}(0)$ は「 $f(x)$ を n 回微分したものに $x = 0$ を代入したもの」を表す。このことを認めた上で、具体的に $f(x) = e^x$ あるいは $f(x) = \sin x$ あるいは $f(x) = \cos x$ に対し

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (5a)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (5b)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (5c)$$

を導け。元々の関数と級数を有限項で打ち切ったもの（例えば $y = e^x$ と $y = 1 + x$ ）を xy 平面上に図示し、 $x = 0$ の近くでは確かに良い近似となっていることを納得せよ。項の数を増やすと $x = 0$ からある程度離れても良い近似となることを確認せよ。

■略解 ただ微分計算をしてグラフを描くだけなので略。

2.2 (準備) 数列の漸化式

みなさんは、漸化式 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよと言われてたら、すぐに一般項を出すことができると思う。「これは $a_{n+1} - a_n = 1$ で公差 1 の等差数列だから公式が使えて・・・」という記憶を忘れても

$$a_{n+1} = a_n + 1 = (a_{n-1} + 1) + 1 = (a_{n-2} + 1) + 1 + 1 = \dots = a_0 + n + 1 \quad (6)$$

というように漸化式を（添字が 0 になるまで）繰り返し使って求めてもよい [手を動かして確認し、納得すること]。

ω を定数とする。一つ飛びの漸化式

$$a_{\ell+2} = -\frac{\omega^2}{(\ell+2)(\ell+1)} a_{\ell}, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (7)$$

は、 a_0 と a_1 を与えておけば、 $a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow \dots$ から偶数番目、 $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow \dots$ から奇数番目の項が順次求まる。

(1) $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{10}$ を a_0 または a_1 で表せ。

■略解 偶数番目は $a_2 = -(\omega^2/2)a_0$, $a_4 = (\omega^4/24)a_0$, $a_6 = -(\omega^6/720)a_0$, $a_8 = (\omega^8/40320)a_0$, $a_{10} = -(\omega^{10}/362880)a_0$ 。奇数番目は $a_3 = -(\omega^2/6)a_1$, $a_5 = (\omega^4/120)a_1$, $a_7 = -(\omega^6/5040)a_1$, $a_9 = (\omega^8/362880)a_1$ 。

(2) ℓ が偶数、すなわち $\ell = 2m$ ($m = 0, 1, \dots$) のとき、 $b_m \equiv a_{2m}$ を導入すると $b_0 = a_0$ で、漸化式は $b_{m+1} = -\frac{\omega^2}{(2m+2)(2m+1)}b_m$ と書ける。この漸化式を式 (6) のように繰り返し使うことにより、 b_m の一般項を b_0 で表せ。また、その結果を a_ℓ で書き換えることにより、 ℓ : 偶数について a_ℓ を a_0 で表せ。

■略解 解くと $b_m = b_0(-\omega^2)^m/(2m)! = a_{2m}$ 。 $2m = \ell$ として $a_\ell = a_0(-\omega)^\ell/\ell!$ が答。

2.3 単振動の運動方程式の解

Frobenius の方法を用いて微分方程式を解く例として、単振動型の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (8)$$

を考える。式 (8) の解を無限級数

$$x(t) = t^k \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell t^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell t^{k+\ell}, \quad a_0 \neq 0 \quad (9)$$

の形で仮定する。和の記号 \sum に抵抗を感じる人は、展開して $x(t) = a_0x^k + a_1x^{k+1} + \dots$ と書いてみると少しは馴染めるであろう。

(1) 式 (9) を一回微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell t^{k+\ell} \right) = \frac{d}{dt} (a_0 t^k + a_1 t^{k+1} + a_2 t^{k+2} + \dots) \\ &= a_0 \cdot k \cdot t^{k-1} + a_1 \cdot (k+1) \cdot t^k + a_2 \cdot (k+2) \cdot t^{k+1} + \dots \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (k+\ell) t^{k+\ell-1} \end{aligned} \quad (10)$$

である。具体的に計算を追うことによりこのことを納得せよ（上の式変形が正しいことを、具体的な計算によって示せということ）。[慣れてくると、右側二本の式を書かなくても一気に最後の式が書けるようになる。]

■略解 書いてあるとおりに式変形を追うだけなので略。

(2) x をもう一度微分して整理すると、次のような式変形をすることになる。以下の式変形を確かめて納得せよ。

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (k+\ell)(k+\ell-1)t^{k+\ell-2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (k+\ell)(k+\ell-1)t^{k+\ell-2} \\ &= a_0 k(k-1)t^{k-2} + a_1 (k+1)kt^{k-1} + \sum_{\ell=2}^{\infty} a_\ell (k+\ell)(k+\ell-1)t^{k+\ell-2} \\ &= a_0 k(k-1)t^{k-2} + a_1 (k+1)kt^{k-1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+2} (k+\ell+2)(k+\ell+1)t^{k+\ell} \end{aligned} \quad (11)$$

■略解 書いてあるとおりに式変形を追うだけなので略。

(3) 式 (9) と式 (11) を運動方程式 (8) に代入すると

$$a_0 k(k-1)t^{k-2} + a_1(k+1)kt^{k-1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell+2}(k+\ell+2)(k+\ell+1) + \omega^2 a_{\ell}] t^{k+\ell} = 0 \quad (12)$$

となることを示せ。

■略解 代入して整理するだけなので略。

(4) 式 (12) は t についての恒等式であるため、以下を得る。恒等式とは何か? 思い出して以下が出ることを示せ。

$$0 = a_0 k(k-1), \quad (13a)$$

$$0 = a_1(k+1)k, \quad (13b)$$

$$0 = a_{\ell+2}(k+\ell+2)(k+\ell+1) + \omega^2 a_{\ell} \quad (\ell = 0, 1, \dots). \quad (13c)$$

$a_0 \neq 0$ だったので、 t^{k-2} の係数に関する条件 [式 (13a)] から $k(k-1) = 0$ が出る (決定方程式という)。

■略解 恒等式は高校生でも知っているので略。

(5) 決定方程式より $k = 0$ または $k = 1$ である。 $k = 0$ のとき a_{ℓ} は 2.2-(2) で求めたものに一致することを確かめよ。

■略解 式 (13c) が $k = 0$ のとき 2.2-(2) の漸化式に一致することを確認すればよい。

(6) 設問 (5) の a_{ℓ} を式 (9) に戻し、三角関数の級数展開の表示 (5) と見比べると、解 $x(t)$ が \sin または \cos のいずれかになっていることを確かめよ。

■略解 代入して見比べるだけなので略。

(7) $k = 1$ の場合に漸化式 (13c) を解け。

■略解 $k = 1$ のとき漸化式は $(\ell+3)(\ell+2)a_{\ell+2} + \omega^2 a_{\ell} = 0$ 。あとは 2.2 と同様の方法で解けるので、以降は略。

(8) 設問 (6) と (7) の結果から、一般解 $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ が導けた。このことを納得せよ。

■略解 ここまでできた人なら納得できると思われるので略。