# 物理学 A 演習問題 #8 略解

## 1　二階非同次線型常微分方程式

一般に，$a_0$, $a_1$, $a_2$ を定数として

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=f(x) \tag{1}$$

の形の微分方程式を定係数二階非同次線型常微分方程式と呼ぶ。(1) 式の一般解 $x(t)$ は，対応する同次微分方程式の一般解 $\widetilde{x}(t)$ と (1) 式の特解 $x_{\mathrm{P}}(t)$ を用いて，$x(t)=\widetilde{x}(t)+x_{\mathrm{P}}(t)$ と与えられるのであった。(1) 式の特殊な場合として，$a_2=m$, $a_1=a_0=0$, $f(t)=-mg$ と置けば（ついでに $x$ の代わりに $z$ と書いて）

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-mg \tag{2}$$

となる。すなわち，自由落下の運動方程式は最も簡単な二階非同次線型常微分方程式とみなせる。以下の問に答えよ。

(1) 対応する同次微分方程式の一般解 $\widetilde{z}(t)$ を求めよ。

**■略解**　対応する同次微分方程式とは，$x$ やその微分を含まない右辺の $-mg$ 項を 0 と置いた $m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=0$ のことである。これを満たす解が $\widetilde{z}=e^{\lambda t}$ の形であると仮定すると，代入して成り立たなければならないので $m(\lambda^2e^{\lambda t})=0$, したがって $\lambda=0$ という重解が得られるので, 同次微分方程式の一般解は $\widetilde{z}=c_1e^{0\cdot t}+c_2\cdot te^{0\cdot t}=\boxed{c_1+c_2t}$（$c_1$, $c_2$：定数)。任意定数を二つ含むので確かに一般解である。

(2) (2) 式の特解を一つ求めよ。［ヒント：$z_{\mathrm{P}}(t)=at^2+bt+c$ の形で置いて，定数を決定せよ。］

**■略解**　(2) 式を見ると「$z$ を二回微分したら定数 $-mg$ になる」という形をしている。二回微分すると定数になる関数は二次関数か一次関数であろうということで，特解を $z_{\mathrm{P}}(t)=at^2+bt+c$ と置ける。これを (2) 式に代入すると $m\times 2a=-mg$ から $a=-g/2$ を得る。そこで特解を $z_{\mathrm{P}}(t)=\boxed{-(g/2)t^2}$ と与えることができる。定数 $b$ と $c$ は設問 (3) で $\widetilde{z}$ と $z_{\mathrm{P}}$ を足したときに $\widetilde{z}$ に含まれる定数 $c_1$ や $c_2$ と足したものを改めて一つの定数と置けるのでここでは無視した（下を見よ)。

(3) (2) 式の一般解を求め，既に良く知っている自由落下の解が再現されていることを確認せよ。

**■略解**　設問 (1) と (2) から，(2) 式の一般解は $z(t)=\widetilde{z}(t)+z_{\mathrm{P}}(t)=\boxed{-(g/2)t^2+c_1t+c_2}$ である。仮に設問 (2) で定数 $b$ と $c$ を残したままにすると（特解なのでこれは良くないのだが，(2) の解答例で言ったことの確認として）$z(t)=\widetilde{z}(t)+z_{\mathrm{P}}(t)=-(g/2)t^2+(b+c_1)t+(c+c_2)$ となるが，定数を改めて $A\equiv b+c_1$, $B\equiv c+c_2$ と取り直せば $z(t)=-(g/2)t^2+At+B$ となって二階の微分方程式の一般解を正しく与える。

## 2　$RLC$ 直列回路（減衰振動）

抵抗 $R$，コンデンサ $C$，コイル $L$ を直列に繋いだ回路を考える。回路方程式（キルヒホッフの第二法則）は

$$RI(t)+\frac{Q(t)}{C}+L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3}$$

で与えられる。$I$ は回路を流れる電流，$Q$ はコンデンサが蓄える電荷であり，連続方程式 $I=\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ の関係がある。

(1) 微分方程式 (1) を $Q(t)$ に関する二階の微分方程式に書き直せ。さらに，抵抗の大きさ $\gamma\equiv R/2L$，振動数 $\omega_0\equiv 1/\sqrt{LC}$ の減衰振動の方程式となっていることを説明せよ。

**■略解**　連続方程式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ を (3) 式に代入すると，回路方程式は $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{C} = 0$，すなわち $\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{LC} = 0$ と書き換えられる。$\gamma$ と $\omega_0$ を用いて表せば $\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Q = 0$ となって，減衰振動の形をした二階の微分方程式に帰着した。

(2) 解が減衰振動となる条件を $R, L, C$ で表し，さらに初期条件 $Q(0) = Q_0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ を満たす解を求めよ。

**■略解**　解を $Q(t) = e^{\lambda t}$ の形と仮定して代入すると $(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$ を得るので, $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ に対して $e^{\lambda t}$ は解となる。減衰振動となるには $e^{i\omega t}$ の形（振動項）になる必要があるので，根号内が負つまり $\boxed{\gamma < \omega_0}$，すなわち $\boxed{R/2L < 1/\sqrt{LC}}$ 。このとき $\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -\gamma \pm i\omega$ であって，一般解は $Q(t) = c_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + c_2 e^{(-\gamma - i\omega t)} = e^{-\gamma t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$ で与えられる。ただし $a \equiv c_1 + c_2$, $b \equiv i(c_1 - c_2)$ と置いた。初期条件を課すとまず $a = Q_0$, また $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = [-\gamma(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + (-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t)]$ より $0 = -\gamma a + b\omega$, よって $b = (\gamma/\omega)a = (\gamma/\omega)Q_0$ と求まるので, 答は $Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}[\cos\omega t + (\gamma/\omega)\sin\omega t] =$ $\boxed{Q_0 \exp\left(-\dfrac{R}{2L}t\right)\left\{\cos\left[\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}\, t\right] + \dfrac{R/2L}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}\sin\left[\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}\, t\right]\right\}}$ 。[“ただし $\gamma = \cdots$, $\omega_0 = \cdots$, $\omega = \cdots$” のようなことが書いてあれば置いた文字（元々はなかった文字）があっても良いです]

[注：交流電圧 $V(t) = V_0 \sin\omega t$ が印加されている場合は強制振動の運動方程式になる。]

## 3　単振動の運動方程式の別の解法 III

単振動の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \qquad \left(\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \tag{4}$$

を考える。

(1) 減衰振動のときと同様に，運動方程式 (4) の解を $x(t) = e^{\lambda t}$ で仮定するとき，$\lambda = \pm i\omega$ を示せ。このときの一般解は？

**■略解**　$x = e^{\lambda t}$ を微分方程式に代入して整理すると $(\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$。ゆえに $\lambda = \pm i\omega$。一般解は $x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$。

(2) Euler の公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて一般解が $x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ と書けることを示せ。

**■略解**　変形して

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \\ &= a(\cos\omega t + i\sin\omega t) + b(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= (a+b)\cos\omega t + i(a-b)\sin\omega t\ . \end{aligned}$$

ここで $a + b = c_1$, $i(a - b) = c_2$ と置けば示された。