物理学 A 演習問題 #10

2025 年 7 月 10 日公開

1　ベクトル解析

二つの三次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に対して，外積（ベクトル積）は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

で定義される。以下の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を適当な三次元ベクトルとするとき，次の四つの公式を示せ。

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,　　(b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(c) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$,　　(d) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$

(2) ベクトル三重積の公式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を示せ。[右辺を見てバックキャブルールと呼ばれる]

(3) 三次元 xyz 空間において，各々の座標軸方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

に対して，内積は容易に確認できるように $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1$, $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0$ である。外積について

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z , \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x , \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{2}$$

を示せ。

[注：第 12 回で導入される角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は，ベクトル積によって定義される物理量である。]

2　中心力

位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ にある質点 m が，$r = |\boldsymbol{r}|$ だけ離れた質点 M から受ける万有引力ポテンシャルは

$$U(\boldsymbol{r}) = -G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3}$$

である。以下の問に答えよ。

(1) m の受ける力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$ の各成分を求め，$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ と表されることを示せ。

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{F}$ について，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ を示せ。

[注：一般に，等方的な中心力は保存力である。]