物理学 A 演習問題 #2

2025 年 4 月 24 日配布・5 月 1 日提出締切

1　一般解を求める別の方法

講義で垂直落下の問題を扱った際には，質点 m の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg \tag{1}$$

を直接積分することによって一般解を導いた。しかし，(1) 式をよく見ると解 $z(t)$ は「二回微分すると定数 $-g$ になる関数」であることが分かる。微分せずとも定数である関数は $z(t) = c$（c：定数），一回微分すると定数になる関数は $z(t) = ct$（c：定数）であるので，(1) 式の解，つまり二回微分すると定数になる関数として，二次関数

$$z(t) = at^2 + bt + c \qquad (a,\, b,\, c：\text{定数}) \tag{2}$$

を仮定することができるだろう。このとき，以下の問に答えよ。

(1) (2) 式を (1) 式に代入することで，a を決定せよ。[注：こうして求まった $z(t)$ は二つの任意定数を含むので，(1) 式の一般解を与える。一般解を求めるにはこのような「発見的」な方法でもよい]

(2) 初期条件 $z(0) = z_0$, $v(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$ を課して残りの二つの定数 b, c を決定した上で，$z(t)$ を求めよ。

2　垂直投射（鉛直投げ上げ）

講義では，質点 m を適当な高さ $z = h$ から地面（$z = 0$）に向けて静かに落とす問題を扱った。ここでは，時刻 $t = 0$ に適当な位置 $z = z_0$ から垂直上方に向けて初速 $v_0 > 0$ で投げ上げる問題を考える。地面を基準点（原点）$z = 0$ とし，座標軸は講義と同様に鉛直上向きに設定せよ。[注：本質的には講義で扱ったのと全く同じ問題である]

(1) 状況を図示し，運動方程式を記せ。原点の位置と質点にはたらく力の向きおよび大きさを明記すること。

(2) 初期条件を満たす解を求めよ。

(3) 特に $z_0 = 0$，すなわち地面から投げ上げた場合を考える。$z(t)$ と速度 $v(t)$ を t の関数として図示した上で，最高点の座標 z_{H} と最高点に到達するまでに要する時間 t_{H} を求めよ。

(4) 質点が再び地面に戻ってくる時刻 t_{R} を求めよ。t_{H} と t_{R} の関係はどのようになっているか？それはなぜか？

3　垂直落下運動におけるエネルギー保存則

以下の文章の空欄を埋めよ。

運動方程式 (1) の両辺に速度 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ を掛けると $\boxed{\text{イ}}$ を得る。一方，微分公式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{f(x)\}^2 = 2f'(x)f(x)$ を思い出すと $\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \boxed{\text{ロ}}$ であるから，$\boxed{\text{イ}}$ の両辺を t で積分すると $\boxed{\text{ハ}}$ を得る。ただし，積分定数を E と置いた。したがって，高等学校で習った「位置エネルギーと運動エネルギーの和は時間的に一定である」という力学的エネルギー保存則

$$mgz + \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = E$$

が運動方程式 (1) から導かれた。