物理学 A 演習問題 #9

2025 年 7 月 10 日公開

1　変数分離形の微分方程式

講義第 6 回で, 空気抵抗下における落下運動を扱ったことは記憶に新しい。運動方程式は（鉛直下向きに z 軸を取ると）$m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ となり, これは $v \equiv \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ で書き換えると $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \mu v$ となって, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu}{m}\left(v - \dfrac{mg}{\mu}\right)$ すなわち変数分離形に書き換えられるので，最終的に解くことができるのであった。このように，x の関数 $y = y(x)$ が満たす微分方程式が $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ の形に変形できるとき，変数分離形と呼ぶのであった。以下の各々について一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2}{x^2}$　　(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 y^2$　　(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y+1}{x+1}$

(7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y}$　　(8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\cos x}{\sin y}$　　(9) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \sin x$

2　変数分離形の微分方程式（電気回路）

(1) 直流電源 E（= 一定），抵抗 R，コンデンサ C が直列に繋がれた回路を考える。
- (a) (a) 回路方程式 (Kirchhoff（キルヒホッフ）の第二法則）が $0 = E - R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \dfrac{Q}{C}$ で与えられることを説明せよ。［ヒント：抵抗について Ohm（オーム）の法則より $V_\mathrm{R} = RI$，コンデンサについて $V_\mathrm{C} = Q/C$，これと連続方程式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$］
- (b) (a) の回路方程式が変数分離形であることを指摘し，$Q(t)$ の一般解を求めよ。電流 $I(t)$ はどうなるか？
- (c) 初期条件 $Q(0) = 0$ を満たす解を求めて図示せよ。$V_\mathrm{R}(t) = RI(t)$ と $V_\mathrm{C}(t) = Q(t)/C$ も図示してみよ。結果は妥当であるか？［注：指数関数の部分を $\exp(-t/\tau)$ と書いたときの $\tau = RC$ は**時定数**と呼ばれる］

(2) (1) の設定で電源 E が無い場合を考える。回路方程式 $0 = R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{C}$ について，(1) の設問 (a)(b)(c) を繰り返せ。ただし，$Q(t)$ に関する初期条件を $Q(0) = Q_0 > 0$ とせよ［$Q(0) = 0$ のままだとどういう状況か？］。

(3) 余力のあるひとは，コンデンサ C をコイル L に取り替えた場合（RL 回路）なども考えてみよ。コイル L とコンデンサ C のみからなる LC 回路は電気振動の名前の通り単振動型の方程式になり，高等学校でならった共振周波数の公式 $f = 1/2\pi\sqrt{LC}$ やエネルギー保存の関係式 $LI^2/2 + CV^2/2 = \text{const.}$ が導出できたりする。

3　減衰振動・強制振動の微分方程式

講義第 8 回と演習 #8（RLC 直列回路の問題）で扱ったように，減衰振動型の微分方程式は，解を $e^{\lambda t}$ の形で置き，適切な λ を求めることで一般解が得られるのであった。以下の各々について一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 9y = 0$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = 0$　　(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 9y = 0$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 0$　　(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 5y = 5x + 6$　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = \cos 3x$

［ヒント：(5) の特解は $y_\mathrm{P} = ax + b$ の形，(6) の特解は $y_\mathrm{P} = a\cos 3x + b\sin 3x$ の形と予想できる。］